RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 gennaio 1907.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra l'estensione agli sviluppi assintotici di un teorema del sig. Hurwitz.* Nota del Socio S. Pincherle.

È noto come le serie di potenze, anche se divergenti, possano servire a rappresentare una funzione quando esse abbiano quella proprietà studiate dal Borel col nome di sommabilità esponenziale, o quando diano lo sviluppo assintotico della funzione nel senso del Poincaré; casi fra i quali, per altro, intercede uno stretto legame, come ho mostrato in altra occasione (1). Ma, mentre per gli sviluppi convergenti in serie di potenze la successione dei coefficienti racchiude in sè, per così dire, tutte le proprietà della funzione e permette in molti casi di metterne in evidenza le singolarità, come risulta da molte e svariate ricerche (2), non si hanno, ch'io sappia, proposizioni analoghe per gli sviluppi assintotici. La presente Nota dà appunto un legame fra la legge di formazione dei coefficienti in uno sviluppo assintotico, e la singolarità della funzione rappresentata, e credo perciò che possa presentare qualche interesse.

(1) Questi Rendiconti, 15 maggio 1904.

(2) Vedine il riassunto nell'opera di J. Hadamard, *La série de Taylor et le prolongement analytique*. Paris, C. Naud, 1901.

L'Hurwitz dava nel 1899 una proposizione (1), facente riscontro ad un noto teorema dell'Hadamard, dal quale risulta, almeno nel caso delle singolarità polari, « che se le serie

$$\alpha(x) = \sum \frac{a_n}{x^{n+1}} \quad , \quad \beta(x) = \sum \frac{b_n}{x^{n+1}} \, ,$$

« sono gli sviluppi nell'intorno di $x = \infty$ di due funzioni analitiche uni-« formi, singolari rispettivamente nei punti p_i e q_j, la serie

$$\sum \frac{c_n}{x^{n+1}} \quad , \quad c_n = a_0 b_n + n a_1 b_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$$

« rappresenta una funzione analitica regolare per $x = \infty$, le cui sole singo-« larità sono nei punti $p_i + q_j$ », teorema ch'io ho dimostrato poi in altro modo ed esteso alle singolarità più generali (2). Mi propongo qui di dimostrare il teorema per il caso in cui gli sviluppi (1) non siano più convergenti, ma rappresentino assintoticamente due funzioni $\alpha(x)$, $\beta(x)$, ora non più regolari per $x = \infty$, le quali tendano a zero almeno del prim'ordine quando x tende all'infinito in tutte le direzioni del piano, una sola eccettuata che sia per esempio quella nel senso dell'asse reale negativo. Considererò per semplicità il caso speciale che tanto $\alpha(x)$ che $\beta(x)$ abbiano al finito un solo punto singolare, p per la prima e q per la seconda, ma l'estensione ad un caso più generale non presenterebbe difficoltà essenziale.

Poniamo $x = \xi + i\eta$, e sia θ un angolo compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Per le ipotesi fatte, è noto che $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ ammettono le funzioni generatrici rispettive $a(u)$, $b(u)$, tali che nel semi-piano i cui punti (ξ, η) verificano rispettivamente le condizioni

$$\xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta > \delta \quad , \quad \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta > \delta'$$

le $\alpha(x)$, $\beta(x)$ sono espresse da

$$(1) \qquad \alpha(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{ux}\, a(u)\, du \quad , \quad \beta(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{ux}\, b(u)\, du \, ,$$

δ e δ' essendo determinati in modo che le rette di equazione

$$(2) \qquad \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = \delta \quad , \quad \xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = \delta'$$

passino rispettivamente per i punti p e q (3). Sotto condizioni note per le

(1) Comptes rendus de l'Académie des sciences, 6 février 1899.
(2) Questi Rendiconti, 5 marzo 1899 e 2 giugno 1906.
(3) V. la mia Nota nei Rendiconti dell'Acc. di Bologna, 29 novembre 1903.

funzioni generatrici, le $\alpha(x)$, $\beta(x)$ avranno rispettivamente gli sviluppi assintotici

$$\alpha(x) \sim \sum \frac{a_\nu}{x^{\nu+1}} \quad , \quad \beta(x) \sim \sum \frac{b_\nu}{x^{\nu+1}} ,$$

dove a_ν, b_ν sono i valori, per $u = 0$, delle derivate ν^{sime} delle funzioni generatrici $a(u)$, $b(u)$. Formiamo ora l'espressione

$$\int_0^{\infty e^{i\theta}} e^{ux}\, a(u)\, b(u)\, du : \tag{3}$$

questa, che è la funzione determinante del prodotto $a(u)$, $b(u)$, sarà notoriamente regolare sotto la condizione

$$\xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta > \delta + \delta', \tag{4}$$

ed ammetterà lo sviluppo assintotico

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(a_0 b_\nu + \nu a_1 b_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 b_{\nu-2} + \cdots + a_\nu b_0 \right) \frac{1}{x^{\nu+1}}$$

quando x va all'infinito nel senso normale alle rette

$$\xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = c$$

dalla parte di c crescente. Quanto precede vale per ogni valore di θ, eccettuati i valori estremi $\pm \frac{\pi}{2}$; onde, al variare di θ, le rette che limitano la convergenza dell'integrale (3) saranno della forma

$$\xi \cos\theta - \eta \operatorname{sen}\theta = \delta + \delta', \tag{5}$$

Ma, posto $p = \lambda + i\mu$, $q = \lambda' + i\mu'$, la prima delle (2) è soddisfatta dalle coordinate λ, μ e la seconda dalle coordinate λ', μ', onde la (5) sarà soddisfatta da $\lambda + \lambda'$, $\mu + \mu'$ cioè dalle coordinate del punto $p + q$, qualunque sia il valore di θ entro i limiti indicati. Per ciò le rette (5) inviluppano il punto $p + q$, che sarà pertanto (1), punto singolare per la funzione rappresentata da (3), e che ne sarà il solo.

(1) Nota citata.

Matematica. — *Paragone fra due triangoli geodetici a lati uguali.* Nota del Corrispondente P. PIZZETTI.

1. Ho recentemente dimostrato, nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino (1), come, dato un triangolo geodetico T sopra una porzione S, opportunamente limitata, di superficie a curvatura positiva, è sempre possibile sopra due sfere di curvatura uguale rispettivamente al massimo e al minimo valore della curvatura assoluta di S, tracciare due triangoli sferici T_1, T_2, tali che i sei elementi (angoli e lati) del triangolo T siano, in grandezza, ordinatamente compresi fra i sei elementi di T_1 e quelli di T_2.

Questa proposizione ha speciale interesse per le ricerche relative ai limiti superiori degli errori che si commettono nella risoluzione numerica approssimata dei triangoli geodetici.

Voglio qui dimostrare come, precisamente, si possano i triangoli sferici T_1, T_2 assoggettare alla condizione di avere i tre lati ordinatamente uguali a quelli del triangolo geodetico T: in questo caso i tre angoli di T risultano ordinatamente *inferiori* a quelli del triangolo T_1 descritto sulla sfera di curvatura *massima*, e *superiori* a quelli del T_2 descritto sulla sfera di curvatura *minima*.

Basta per questo dimostrare che *se si considerano due superficie, o porzione di superficie* S, S_1 *tali che la curvatura assoluta in un qualsiasi punto di* S *sia non maggiore di quella che in ogni punto di* S_2 (2), *descritti sulle due superficie due triangoli geodetici di eguali lati, gli angoli del 1° riusciranno ordinatamente minori di quelli corrispondenti del 2°*. Intendiamo, naturalmente, per angoli *corrispondenti* quelli opposti a lati eguali.

2. Sulla superficie S siano σ, α le coordinate polari geodetiche di un punto A rispetto a un polo P. Sarà

$$ds^2 = d\sigma^2 + g^2 \cdot d\alpha^2$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare. La g esprime la così detta *lunghezza ridotta* dell'arco geodetico AP, e soddisfà alle relazioni

$$(1) \qquad k = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2},$$

$$(2) \qquad (g)_{\sigma=0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = 1,$$

(1) *Intorno al grado di approssimazione che si raggiunge nel risolvere i triangoli geodetici sopra una superficie qualunque* (Mem. Accademia R. delle Scienze di Torino, serie II, tom. LVII).

(2) Escludiamo qui, e poi, il caso in cui entrambe le superficie siano a curvatura costante.

dove k è la curvatura assoluta di S in A. Riguardo a questa k supporremo che essa sia finita in ogni punto; essa potrà presentare discontinuità ordinarie nel passaggio attraverso linee della superficie.

Se la superficie è a curvatura *negativa*, la (1) dimostra che la derivata $\frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2}$ è, in ogni punto, dello stesso segno di g, e quindi la $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ è crescente finchè $g > 0$. D'altra parte, in causa delle (2), la g assume valori positivi per valori abbastanza piccoli di σ. Dunque per ogni valore di σ (eccettuato $\sigma = 0$) sarà $\frac{\partial g}{\partial \sigma} > 1$, e $g > 0$.

Riguardo alle superficie a curvatura *positiva*, ovvero *in parte positiva in parte negativa*, ci varremo della espressione di g

$$(3) \qquad g = \mathrm{R} \operatorname{sen} \frac{\sigma}{\mathrm{R}} + \mathrm{R} \int_0^\sigma g_x (k_1 - k_x) \operatorname{sen} \frac{\sigma - x}{\mathrm{R}} \, dx$$

data nella citata Memoria, dove k_1 è una quantità positiva finita qualsiasi ed $\mathrm{R} = 1 : \sqrt{k_1}$; g_x e k_x indicano le espressioni di k e g, ove in luogo della lettera σ si ponga la x. La (3) dimostra che, se la curvatura k si mantiene algebricamente inferiore a k_1, la g non può annullarsi per un arco $\sigma \leq \pi \mathrm{R}$. Derivando la (3) abbiamo

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \cos \frac{\sigma}{\mathrm{R}} + \int_0^\sigma g_x (k_1 - k_x) \cos \frac{\sigma - x}{\mathrm{R}} \, dx$$

la quale (insieme colla osservazione ora detta riguardo a g) dimostra che, nella ipotesi fatta riguardo a k, la $\frac{\partial g}{\partial \sigma}$ non può annullarsi per un arco $\sigma \leq \pi \mathrm{R} : 2$, ossia per

$$(4) \qquad \sigma \leq \frac{\pi}{2\sqrt{k_1}} .$$

Quando, pertanto, la superficie non sia tutta a curvatura negativa, intenderemo che gli archi di geodetica da prendere in considerazione siano, in lunghezza, limitati secondo la (4).

Con questa limitazione la *curvatura geodetica*, nel punto A, della circonferenza geodetica di centro P, espressa da

$$h = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \sigma} ,$$

sarà *finita* e *negativa* in ogni punto (eccettuato in P).

Si consideri ora una seconda superficie, o porzione di superficie, S_1, sulla quale assumiamo un punto P_1 come polo di coordinate polari e facciamo corrispondere al punto $A(\sigma, \alpha)$ della S il punto A_1 di eguali coordi-

nate σ, α. Indichiamo, pel punto A_1, con K, G, H le cose analoghe alle k, g, h. Posto

$$D = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \sigma} - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial \sigma},$$

avremo

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(g G D) = G\frac{\partial^2 g}{\partial \sigma^2} - g\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2} = g G (K - k).$$

Ora il prodotto $g G D$ si annulla per $\sigma = 0$. Esso sarà quindi positivo per ogni valore di σ se si suppone $K > k$. Se dunque supponiamo che la curvatura assoluta della S_1 sia, in ogni punto dell'arco $A_1 P_1$, maggiore di quella della S nel corrispondente punto dell'arco AP, la curvatura geodetica in A della circonferenza di centro P sarà, in valore assoluto, maggiore di quella della corrispondente circonferenza in A_1. E, tenuto conto del segno,

$$h < H. \tag{5}$$

3. Sopra la superficie S si assuma ora un sistema di coordinate bipolari, indicando con u e v le distanze geodetiche del punto generico M da due punti fissi A e B. Ove la superficie non sia tutta a curvatura negativa, la intenderemo limitata in modo che nè u, nè v superino il limite fissato dalla (4). Allora per le cose dette nel § 6 della citata Memoria, due punti della regione così limitata saranno collegati da *una sola* geodetica. Chiamando θ l'angolo in M del triangolo AMB, l'espressione del quadrato dell'elemento lineare sarà

$$ds^2 = \frac{du^2 - 2\,du\,dv\cos\theta + dv^2}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Poichè l'angolo θ non può assumere i valori 0 e π, all'infuori dei punti della geodetica AB [1], il reticolato delle linee coordinate sarà regolare in tutta la regione della superficie che si ha da considerare. La curvatura geodetica della linea $u = \text{cost}$ (circonferenza geodetica di centro A), per la formula generale

$$h_u = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\},$$

sarà

$$h_u = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial u}.$$

[1] Se fosse $\theta = 0$ fuori della geodetica AB, un punto e la tangente in esso determinerebbero due differenti geodetiche, il che si esclude. Se fosse $\theta = \pi$, gli archi u, v sarebbero per diritto fra loro e i punti A, B risulterebbero collegati da due differenti geodetiche.

Similmente

$$h_v = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial\theta}{\partial v},$$

donde, eliminando prima $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, poi $\frac{\partial\theta}{\partial u}$:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \cdot \cos\theta}{\partial u} = h_u\cos\theta - h_v \\ \dfrac{\partial \cdot \cos\theta}{\partial v} = h_v\cos\theta - h_u. \end{cases}$$

Pongasi ora

$$u + v = \alpha \quad , \quad u - v = \beta,$$

in guisa che

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Avremo dalle (6)

$$\frac{\partial \cdot \cos\theta}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}(h_u + h_v)(\cos\theta - 1)$$

ovvero

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}(h_u + h_v).$$

Similmente

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}\log\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}(h_u - h_v).$$

4. Le linee $\alpha = \text{cost}$, $\beta = \text{cost}$ sono le così dette *ellissi* e *iperboli geodetiche* aventi i fuochi in A e B. Il quadrato dell'elemento lineare riferito a tali coordinate assume la forma

$$(8^{bis})\qquad ds^2 = \frac{d\alpha^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{d\beta^2}{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}};$$

e poichè, come si è detto, θ non può assumere i valori 0 e π, i coefficienti di questa equazione resteranno finiti in tutta la regione della superficie che si ha da considerare, eccetto che nei punti della geodetica AB. Di più, poichè entro la regione di superficie considerata, ogni geodetica è linea di lunghezza minima e quindi la somma di due lati di un triangolo geodetico è maggiore del terzo, chiamando c la lunghezza dell'arco AB, dovrà essere, per ogni punto esterno alla geodetica AB:

$$(9)\qquad u + v > c \quad , \quad |u - v| < c,$$

il chè vuol dire che la ellisse geodetica passante per un punto qualsiasi dovrà intersecare la geodetica AB in punti fuori dell'arco $AB = c$, e ogni iperbola geodetica dovrà intersecare la AB in un sol punto entro l'arco stesso AB. È poi evidente che i punti di intersezione di una ellisse geodetica colla AB non possono essere più di due.

Ciò posto per il punto M considerato si immagini tracciata la iperbola geodetica i la quale intersechi in M_0 l'arco AB. Lungo l'arco $M_0 M$ della i la variabile α cresce da c ad $u+v$ e poichè il rapporto $d\alpha : ds_i = 2\cos\frac{\theta}{2}$ (intendiamo con s_i la lunghezza d'arco della i) non può annullarsi fuori che in M_0, per quanto si è detto riguardo all'angolo θ, la α dovrà continuamente crescere da M_0 ad M.

Integrando allora la (7) lungo l'arco $M_0 M$ ed osservando che in M_0 si ha $\theta = 180°$, $\alpha = c$, avremo

$$\log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}\int_c^{u+v} (h_u + h_v)\, d\alpha. \tag{9}$$

Per una seconda superficie S_1, la cui curvatura sia in ogni punto non minore del massimo della curvatura di S, consideriamo il triangolo $A_1 M_1 B_1$ del quale i lati sono

$$A_1 B_1 = c \qquad A_1 M_1 = u \qquad M_1 B_1 = v.$$

Indicando con $H_u H_v$ le cose analoghe alle $h_u h_v$, e con Θ l'angolo $A_1 M_1 B_1$ avremo

$$\log \operatorname{sen} \frac{\Theta}{2} = \frac{1}{4}\int_c^{u+v} (H_u + H_v)\, d\alpha$$

la quale paragonata colla (9), e, tenuto conto della (5), dimostra che

$$\theta < \Theta.$$

Il teorema enunciato al n. 1 è così dimostrato.

5. Analogamente alla formola (9), può scriversi la

$$\log \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}\int_c^{u+v} (h_u - h_v)\, d\beta, \tag{10}$$

la quale si ottiene integrando la (8) lungo l'arco $M_1 M$ di ellisse geodetica, fra il punto M_1 in cui questa interseca la geodetica AB oltre B (nel quale punto $\theta = 0$, $\beta = c$) fino al punto M.

Nel caso della sfera di raggio 1, posto

$$h_u = -\operatorname{cotg} u = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

$$h_v = -\operatorname{cotg} v = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

le (8) (9) conducono immediatamente alle note formole trigonometriche

$$\log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c + u - v) \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2}(c - u + v)}{\operatorname{sen} u \,.\, \operatorname{sen} v}$$

$$\log \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c + u + v) \,.\, \operatorname{sen} \frac{1}{2}(u + v - c)}{\operatorname{sen} u \,.\, \operatorname{sen} v}.$$

6. I secondi membri delle formole (9) e (10) possono esprimersi diversamente, osservando che, per la forma (8^{bis}) dell'elemento lineare, la curvatura geodetica della linea $\alpha = \text{cost}$ (ellisse geodetica) è:

$$h_\alpha = \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}$$

e l'elemento d'arco della $\beta = \text{cost}$ (iperbola geodetica) è:

$$ds_\beta = \frac{d\alpha}{2 \cos \frac{\theta}{2}} .$$

Abbiamo dunque

$$h_\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta},$$

donde

$$\log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \int_{M_0}^{M} h_\alpha \,.\, ds_\beta .$$

Similmente

$$\log \cos \frac{\theta}{2} = \int_{M_1}^{M} h_\beta \,.\, ds_\alpha ;$$

la prima di queste due integrazioni è estesa lungo l'arco $M_0 M$ di iperbola, la seconda lungo l'arco $M_1 M$ di ellisse geodetica.

Fisica. — *Relazione fra la pressione osmotica e la tensione superficiale* [1]. Nota del Corrisp. A. Battelli e di A. Stefanini.

Lo studio che già iniziammo sulla natura della pressione osmotica [2], ci portò a ritenere: *a*) che debbono essere isoosmotiche quelle soluzioni che hanno ugual tensione superficiale; *b*) che quando due liquidi di tensione superficiale diversa sono separati da una parete porosa o semipermeabile, il passaggio attraverso il setto deve avvenire nel modo, che più si presta a rendere uguali le tensioni superficiali delle due parti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Pisa.

(2) Rend. della R. Acc. dei Lincei, XIV, Serie V, 2° sem. 1905, pag.

In appoggio di queste proposizioni, che spiegavano tutti i fatti osmotici allora conosciuti e che rendono conto anche di quelli enunciati posteriormente dal Barlow nei suoi studî sulle soluzioni alcooliche (1), noi adducemmo soltanto quelle poche esperienze, che le difficoltà inerenti alle misure osmotiche con membrane semipermeabili ci permisero allora di fare, nonostante che v'impiegassimo un tempo assai lungo.

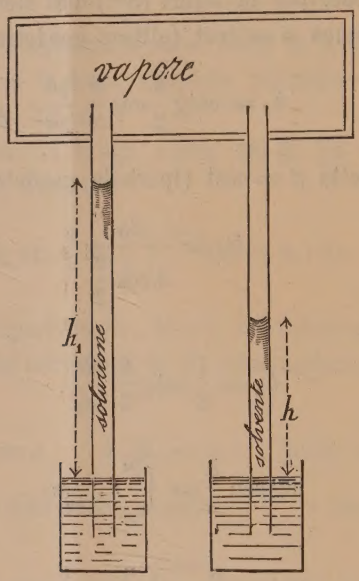


Fig. 1.

Per l'importanza che hanno nella teoria delle soluzioni, era quindi conveniente ricercare se quelle proposizioni fossero o no confermate da altri fatti, e non abbiamo mancato di eseguire a tale scopo nuove esperienze.

2. Prima, peraltro, di riferire i risultati di queste nostre ricerche, mostreremo come la prima delle proposizioni sopra riferite possa ottenersi anche con semplici considerazioni teoriche, indipendenti da qualunque ipotesi sulla natura della pressiona osmotica.

Si abbiano infatti due recipienti (fig. 1), che contengano uno il solvente puro, l'altro la soluzione che si vuole studiare; in ciascuno di essi peschi un tubo capillare e i due tubi sbocchino in una camera contenente soltanto il vapore del solvente.

(1) *Phil. Mag.* (6) *10*, pag. 1, 1905.

Nell'equilibrio i liquidi si disporranno nei due tubi ad altezze diverse, e se chiamiamo, pel solvente:

ϱ, il raggio di curvatura della superficie libera nel capillare,

α, la tensione superficiale,

s, il peso specifico,

h, l'altezza della colonna liquida nel tubo,

e ϱ_1, α_1, s_1, e h_1 le grandezze corrispondenti per la soluzione,

per la formula di Laplace si avrà, nell'ipotesi che i tubi siano a sezione circolare uguale:

$$(1) \qquad \begin{cases} h = \dfrac{2\alpha}{s}\dfrac{1}{\varrho} \\ h_1 = \dfrac{2\alpha_1}{s_1}\dfrac{1}{\varrho_1}. \end{cases}$$

La differenza fra le tensioni di vapore del solvente e della soluzione, che indicheremo con $p - p_1$, sarà naturalmente uguale al peso della colonna di vapore che ha per altezza $h_1 - h$, e, se chiamiamo con d la densità del vapore, si avrà:

$$p - p_1 = (h_1 - h)\,d$$

ossia per la (1)

$$(2) \qquad p - p_1 = 2\left(\frac{\alpha_1}{s_1\,\varrho_1} - \frac{\alpha}{s\varrho}\right)d\,.$$

Facciamo ora l'ipotesi che la soluzione sia sufficientemente diluita da poter ritenere senza errore sensibile $s = s_1$; allora la (2) si può scrivere così:

$$(3) \qquad p - p_1 = 2\left(\frac{\alpha_1}{\varrho_1} - \frac{\alpha}{\varrho}\right)\frac{d}{s}\,.$$

E se con π si indica la pressione osmotica della soluzione, si avrà, sempre nella suddetta ipotesi,

$$(4) \qquad p - p_1 = \pi\frac{d}{s},$$

che confrontata colla (3) dà

$$(5) \qquad \pi = 2\left(\frac{\alpha_1}{\varrho_1} - \frac{\alpha}{\varrho}\right).$$

Quando si abbia un'altra soluzione la cui pressione osmotica sia π', e della quale gli altri elementi siano contrassegnati con le medesime lettere usate per la prima, ma accentate, si avrà analogamente

$$(6) \qquad \pi' = 2\left(\frac{\alpha_1'}{\varrho_1'} - \frac{\alpha}{\varrho}\right),$$

e sottraendo la (5) dalla (6):

$$\pi' - \pi = 2\left(\frac{\alpha_1'}{\varrho_1'} - \frac{\alpha_1}{\varrho_1}\right). \tag{7}$$

Se nel fare le due soluzioni si adopereranno tali quantità delle due sostanze che ambedue risultino di uguale tensione superficiale, se, cioè, si farà in modo che sia

$$\alpha_1' = \alpha_1 ,$$

sarà anche

$$\varrho_1' = \varrho_1$$

e

$$\pi' = \pi .$$

Quindi, come già avevamo trovato per altra via (l. c.), dalle considerazioni precedenti si può concludere che:

Quando due soluzioni diluite hanno ugual tensione superficiale, hanno anche ugual pressione osmotica.

3. Per fornire di questa legge altre prove sperimentali, oltre quelle già esposte nella nostra Nota sopracitata, occorreva preparare soluzioni di sostanze diverse che avesssero ugual tensione superficiale, e riscontrare se possedessero pure ugual pressione osmotica.

Fra i metodi che servono a misurare la tensione superficiale, abbiamo scelto quello di Jäger [1], perchè, mentre è di applicazione assai facile, conduce a risultati di grande precisione.

Esso consiste nel determinare il dislivello verticale che due tubi capillari di diametro diverso debbono avere nella soluzione studiata, perchè l'aria, che mediante un palloncino di gomma si soffia contemporaneamente in ambedue, esca indifferentemente dall'uno o dall'altro.

La disposizione che noi gli abbiamo data si vede nella fig. 2 [2]. Se h è tal dislivello (misurato accuratamente con un catetometro) ed s è il peso specifico della soluzione, si dimostra che la tensione superficiale è data da

$$\alpha = chs$$

con c costante.

[1] Wien. Sitzber. *100*, pag. 245, 1891.

[2] Per eseguire una misura si incomincia dal comprimere molto il palloncino P di gomma fino a far salire molto l'acqua nel tubo C del manometro; poi si stringe la pinzetta A, isolando così il palloncino in modo che l'efflusso dell'aria dai due capillari sia determinata dalla pressione dovuta alla colonna d'acqua di C. Quando questa pressione è divenuta molto piccola, con la vite V, che comanda il sostegno cui è fissato uno dei capillari, si regola il dislivello in modo che l'efflusso avvenga indifferentemente dall'uno o o dall'altro dei due tubi.

Per la buona riuscita delle esperienze è necessario che il tratto B del tubo che viene dal manometro sia capillare.

Volendo fare delle misure assolute c può essere determinato campionando l'apparecchio con liquidi di tensione superficiale nota.

Ma per il nostro scopo ciò non è necessario, perchè le considerazioni seguenti richiederanno soltanto l'uso dei valori relativi della tensione super-

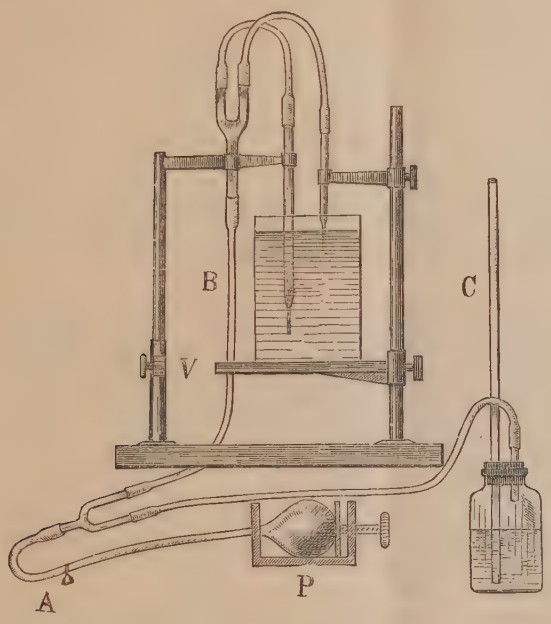


Fig. 2.

ficiale delle varie soluzioni. Allora dette α, α' le tensioni superficiali di due soluzioni il loro rapporto sarà sempre dato da

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{hs}{h's'} \cdot \tag{8}$$

Servendoci di questo metodo abbiamo voluto constatare in primo luogo le soluzioni che avevano una pressione osmotica uguale risultassero anche di ugual tensione superficiale. E poichè Hamburger ha trovato di ugual pressione osmotica le seguenti soluzioni:

Nitrato potassico	1,01 %
Solfato potassico	1,11 %
Solfato di magnesio	1,78 %
Zucchero.	5,76 %,

noi abbiamo determinato per queste medesime soluzioni i valori relativi della

tensione superficiale. I risultati delle nostre misure sono contenuti nella seguente tabella:

Sostanze	Temperatura	Peso specifico s	Dislivello fra i due tubi capillari h	hs
KNO_3	12,9	1,0063	cm. 5,626	5,660
K_2SO_4	13,0	1,0091	» 5,619	5,670
$MgSO_4$	13,0	1,0088	» 5,620	5,666
$C_{12}H_{22}O_{11}$	12,5	1,0233	» 5,540	5,669

L'accordo che si riscontra nella tabella precedente è tale da far ritenere provata la legge che si voleva dimostrare.

4. Per dare una maggiore estensione alle nostre ricerche, abbiamo fatto anche la prova inversa, cioè abbiamo scelto alcune soluzioni che avessero uguale tensione superficiale e ne abbiamo poi confrontato le pressioni osmotiche. A tal uopo, abbiamo preparato delle soluzioni di eguale tensione superficiale rendendo uguali, con convenienti concentrazioni, i prodotti hs relativi alle varie soluzioni. In tal modo abbiamo trovato che due soluzioni, una di mannite e una di nitrato potassico, sono di ugual tensione superficiale a 12° e alle concentrazioni seguenti:

Sostanza	Titolo della soluzione	
	grammi per litro	normale
Mannite	43,00	0,238
Nitrato potassico	16,50	0,163

Nella estesissima serie di lavori sulla tensione superficiale dei liquidi non mancano indicazioni che potrebbero fornire altre coppie di soluzioni isocapillari; ma noi trarremo profitto soltanto dalle misure eseguite dal Whatmough (1), poichè esse ci serviranno anche ad altri confronti. Il metodo usato dal Whatmough è una modificazione di quello di Jäger, e consiste nel far uso di un solo tubo capillare di piccolissimo diametro, che pesca due o tre millimetri al più nella soluzione. In tal modo si rende inutile la determinazione del peso specifico, ma si deve misurare la pressione minima che occorre per stabilire l'efflusso dell'aria dal tubo. La costruzione dell'apparecchio è però assai complicata, allo scopo di poter regolare convenientemente la pressione dell'efflusso.

(1) Loc. cit.

Tale metodo del Whatmough ci sembra meno adatto di quello di Jäger per fornire valori assoluti delle tensioni superficiali; ma, pel complesso di precauzioni che furono prese nell'esecuzione delle misure, possiamo servirci con tutta sicurezza dei suoi risultati. Secondo questi sono di ugual tensione superficiale alla temperatura di 18°, 2 le soluzioni diluite

0,25 normale di KNO_3 e 0,25 normale di Na Cl,
0,87 » » e 0,68 » »

Per queste due coppie il peso specifico si può ritenere sensibilmente lo stesso e quindi possiamo servircene, insieme con le due soluzioni da noi preparate, per la verificazione dei risultati teorici.

5. Per riconoscere se tali soluzioni sono isoosmotiche, non occorrendo eseguire misure assolute di pressioni osmotiche, si può fortunatamente fare a meno di ricorrere alle membrane semipermeabili del Traube, di cui la preparazione e l'uso avrebbero presentato serî ostacoli per la difficoltà di trovare vasi porosi adatti, e avrebbe ad ogni modo richiesto un tempo assai lungo. Basta, infatti, per il nostro scopo, ricorrere all'ematocrito di Hedin che si fonda sul fatto che i globuli rossi mantengono inalterato il loro volume, soltanto se si trovano in una soluzione la cui pressione osmotica sia uguale a quella del liquido che contengono nel loro interno. Due soluzioni saranno dunque isoosmotiche allorchè provocheranno uguali variazioni nel volume di una medesima quantità di sangue.

Poichè i globuli rossi si rompono nelle soluzioni che hanno pressione osmotica minore di quella del loro contenuto, questo metodo si presta solamente per soluzioni che abbiano una pressione osmotica superiore a quella decinormale di KNO_3, che, secondo Hamburger, ha la stessa pressione osmotica del contenuto dei globuli rossi. Tutte le soluzioni da noi adoperate soddisfano a questa condizione.

Per eseguire i confronti con l'ematocrito, noi mettevamo uguali quantità di sangue fresco in due capsule di porcellana; in una di esse si versava un certo volume della prima soluzione e nell'altro un volume uguale della seconda soluzione. Dopo aver bene agitato, si riempivano con le due mescolanze così formate i due tubetti dell'ematocrito e si sottoponevano alla centrifugazione fissandoli sopra un apparecchio di rotazione. Dopo circa un minuto si osservava qual'era la frazione del volume iniziale cui si erano ridotti i globuli rossi, ciò che si vedeva facilmente mediante la graduazione incisa sui tubetti stessi. Se le pressioni osmotiche delle due soluzioni erano uguali, dovevano essere uguali anche i volumi residui dei globuli rossi nei due tubetti. Per maggior sicurezza per ciascuna coppia di soluzioni l'esperienza veniva ripetuta più volte.

Poichè la tensione superficiale varia sensibilmente con la temperatura, e in modo diverso da una soluzione all'altra, le prove con l'ematocrito sono state eseguite alla stessa temperatura, alla quale furono compiute le ricerche sulla tensione superficiale.

Ecco i risultati delle prove eseguite coll'ematocrito sulle precedenti soluzioni isocapillari:

Sostanze	Letture all'ematocrito	Medie (1)
Mannite 0,238 N	5,5 6 6,5 6,5	6,13
KNO_3 0,163 N	5,5 6 6,5 6,5	6,13
KNO_3 0,25 N	9 9 9 9 8,5	8,9
Na Cl 0,25 N.	9 9 9 8,5 8,5	8,8
KNO_3 0,87 N	10 10 9 10	9,75
Na Cl 0,68 N	9 10 8 10	9,25

Da tutte queste soluzioni è dunque confermata la legge suesposta.

6. Le osservazioni precedenti portano anche ad un'altra conseguenza.

E cioè: poichè dalle leggi di Raoult, e da considerazioni termodinamiche assai semplici (2), si può concludere che *quando due soluzioni sono isoosmotiche debbono avere anche la stessa pressione di vapore*; e poichè d'altra parte, dalla relazione (3) del § 2 si deduce che *le soluzioni che hanno la stessa pressione di vapore debbono avere anche la stessa tensione superficiale*, si può affermare che

se due soluzioni sono isoomotiche, debbono anche essere isotoniche e isocapillari.

La verificazione sperimentale della coesistenza di questa proprietà in una coppia di soluzioni, ci vien favorita dalle ricerche di Smits (3) sopra le tensioni di vapore delle soluzioni, messe a confronto con quelle di Whatmough e con le nostre.

(1) Il volume cui si riducono i globuli rossi è tanto minore, quanto più grande è la pressione osmotica della soluzione adoperata. I numeri di questa colonna non dànno peraltro nessuna indicazione sui valori relativi delle pressioni per le soluzioni cui si riferiscono, perchè mentre per ciascuna coppia si è adoperato il medesimo volume di sangue' questo volume non fu sempre lo stesso per tutte le coppie.

(2) Vedi V. Hoff, *Phil. Mag.* (5), *26*, pag. 92, 1888.

(3) Zeits. f. phys. Chem., *39*, pag. 401, 1902.

Infatti, dai valori trovati dallo Smits si deduce che producono la stessa depressione nella tensione del vapore acqueo le soluzioni 0,68 normale di Na Cl e 0,87 normale di KNO_3. Ora queste, come si è visto, furono trovate dal Whatmough di ugual tensione superficiale e da noi di ugual pressione osmotica.

Ripetiamo qui a scanso di equivoci che *tutte le considerazioni precedenti sono applicabili solamente a soluzioni diluite.*

Per avere poi un'idea del come le soluzioni che non hanno ugual peso specifico si allontanino dalla legge su mentovata, abbiamo esaminato le seguenti due coppie di soluzioni

0,68 N di Na Cl e 1,0 N di zucchero;
0,25 N di $BaCl_2$ e 0,25 N di KNO_3.

Le prime due sono state trovate di ugual tensione di vapore da Smits, le altre di ugual tensione superficiale da Whatmough. Esse però confrontate con l'ematocrito hanno dato i risultati seguenti:

Soluzioni	Peso specifico	Letture sull'ematocrito
Na Cl	1,03	5
$C_{12}H_{22}O_{11}$	1,14	11
$BaCl_2$	1,168	10
KNO_3	1,062	7,5

Di qui risulterebbe che le soluzioni di peso specifico assai diverso hanno, a parità di tensione superficiale, una pressione osmotica tanto maggiore, quanto più piccola è la loro densità.

Ma senza insistere su questa conclusione, possiamo ritenere che soltanto per soluzioni diluite di ugual peso specifico l'uguaglianza rispettiva di due fra gli elementi: tensione superficiale, pressione osmotica e tensione di vapore, porta con sè l'uguaglianza del terzo.

7. Queste proprietà delle soluzioni ci forniscono un nuovo modo di interpretare i fenomeni osmotici.

Noi possiamo ritenere che le membrane semipermeabili costituiscano come un reticolato di vescichette, piene di vapore e in comunicazione da una parte col solvente puro e dall'altra con la soluzione, per mezzo di tubetti capillari (fig. 3). Il passaggio del solvente da una parte all'altra av-

viene allora per la evaporazione del liquido e la successiva condensazione del vapore.

Infatti, poichè la tensione di vapore di una soluzione è sempre minore di quella del vapore del solvente, la distillazione entro le vescichette dovrà esser più copiosa dalla parte del solvente puro che da quella della soluzione, e l'eccesso di vapore emesso dal solvente si condenserà e passerà, così liquefatto, entro la soluzione. Per l'entrata del liquido entro la cella osmotica crescerà la pressione interna; e la superficie dei menischi B della soluzione in presenza del vapore delle vescichette si farà via via meno curva, mentre la curvatura della superficie A del solvente resterà invariata. E poichè, da quanto stabilì lord Kelvin, il vapore, a contatto di una superficie curva assume una pressione via via minore di mano in mano che la curvatura

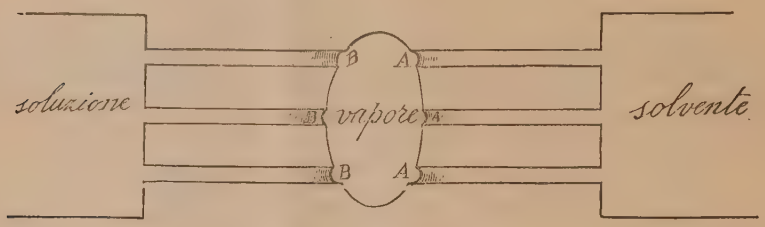


Fig. 3.

delle superficie diviene maggiore, così giungerà un momento in cui vi sarà equilibrio fra la tensione di vapore a contatto delle superficie A del solvente e la tensione di vapore della soluzione alla superficie B che tende a diventare piana o anche convessa; onde il passaggio di liquido da una parte all'altra cesserà e si raggiungerà l'equilibrio osmotico.

Se poi dalle due parti della parete si avranno due soluzioni isocapillari, avendo ambedue anche la stessa tensione di vapore e lo stesso raggio di curvatura alle superficie libere, non vi dovrà essere alcun passaggio di liquido poichè vi sarà perfetta uguaglianza fra la quantità di vapore che si forma e che si liquefà nello stesso tempo dalle due parti.

Un tale modo di vedere viene confermato dalla seguente esperienza: se si prende una cella osmotica fatta con un vaso poroso alla maniera di Pfeffer, si trova che quando essa è vuota ed è immersa nell'acqua, questa non filtra attraverso alla cella nemmeno con l'eccesso di pressione di una atmosfera. E noto invece che l'acqua penetra con la massima facilità attraverso al vaso poroso prima di formarvi la membrana. Per ciò che abbiamo detto questo comportamento è assai naturale, perchè non è l'acqua che attraversa la cella ma è il suo vapore.

8. Tale meccanismo della pressione osmotica rende conto anche del fatto accennato dal Traube (1) secondo cui le membrane semipermeabili si lasciano attraversare da quelle sostanze che sciolte nell'acqua ne abbassano la tensione superficiale, purchè anche a questo proposito si facciano opportune restrizioni. Il Traube faceva, cioè, notare che le soluzioni acquose di tutti gli alcoli hanno tensione superficiale notevolmente inferiore a quella dell'acqua, e che appunto tutti gli alcoli attraversano quelle membrane, che sono impermeabili ai sali, allo zucchero, all'urea,... e cioè a tutte quelle sostanze, che sciolte nell'acqua ne accrescono la tensione superficiale.

Secondo il concetto da noi sopra esposto, è naturale che le sostanze volatili debbano attraversare le membrane semipermeabili; perchè il loro vapore, penetrato dalla parte BB (fig. 3) entro le vescichette della membrana insieme al vapore del solvente, si condenserà dalla parte AA sulla superficie del solvente puro, e in tal modo esse attraverseranno la membrana.

La restrizione da farsi al concetto del Traube riguarda quelle sostanze fisse, come la salicina ad es., le quali, pur abbassando la tensione superficiale dell'acqua, non passano attraverso le membrane semipermeabili. Nel nostro studio precedente mostrammo come esse non costituiscano eccezione alcuna alle proposizioni da noi stabilite.

Veramente, l'esistenza di membrane semipermeabili nello stretto senso della parola è molto contestabile; perchè tutte quelle conosciute sono attraversate più o meno facilmente anche dal soluto, qualunque esso sia. Ma se anche le sostanze fisse, sciolte nell'acqua ad es., attraversano tali membrane, il loro passaggio essendo estremamente lento, non può opporsi allo stabilirsi della pressione osmotica anche rilevante, che è dovuta, secondo il concetto da noi sopra esposto, alla differenza fra le tensioni superficiali (o fra le tensioni di vapore) del solvente e della soluzione. Tal passaggio può spiegarsi, del resto, con la formazione di aggregati molecolari instabili fra la sostanza disciolta e la sostanza colloidale che forma la membrana; aggregati che poi, giunti a contatto col solvente, si scomporranno e cederanno ad esso le molecole del soluto.

Ciò che precede porta dunque a ritenere che

soltanto le sostanze che dallo stato di soluzione non passano alla stato di vapore, son quelle che sciolte in un liquido qualunque non attraversano liberamente una membrana semipermeabile, la quale separi la loro soluzione dal solvente puro.

9. La relazione che noi abbiamo stabilita fra pressione osmotica e tensione superficiale, permettendo di adoperare un nuovo metodo per riconoscere se due soluzioni sono o no isotoniche, può recare anche un notevole vantaggio in molte ricerche.

(1) *Phil. Mag.* (6), *8*, pag. 704, 1904.

È noto infatti il grande interesse che hanno le ricerche osmotiche negli studî sul ricambio organico fra i tessuti animali, e quanto grandi sieno le difficoltà che si presentano quando si vogliano misurare o confrontare le pressioni osmotiche dei liquidi organici. Non potendo ricorrere alle misure dirette con le membrane semipermeabili, si fa spesso uso delle relazioni stabilite dal Raoult fra la pressione osmotica e l'abbassamento del punto di congelazione e l'inalzamento del punto di ebullizione. Ma le misure crioscopiche ed ebullioscopiche, se con esse vuolsi raggiungere una certa precisione, sono così difficili e richiedono tal complesso di apparecchi e di precauzioni, che non sempre si possono eseguire in un laboratorio di fisiologia. E inoltre, dato che il fisiologo possegga gli apparecchi e la pratica necessaria, molte volte quei metodi non si possono adoperare, poichè non vi si prestano le sostanze da studiarsi. Neppure il metodo dell'ematocrito è sempre usabile, perchè molti liquidi alterano il sangue sciogliendone i globuli rossi.

Ora, secondo quanto abbiamo di sopra stabilito, per riconoscere se vi è uguaglianza fra le pressioni osmotiche di due soluzioni nello stesso solvente, o di due liquidi dell'organismo animale, basterà, ricercare se hanno la stessa tensione superficiale: ciò che potrà comodamente, e con grande precisione, farsi sempre col metodo di Jäger, che è quello che più di tutti si presta per la sua sensibilità e per la sua esattezza.

10. Riassumendo, possiamo stabilire che

I) le soluzioni diluite di ugual tensione superficiale hanno la stessa pressione osmotica e la stessa tensione di vapore; e, in generale, perchè siano isotonotiche non occorre che siano equimolecolari;

II) il passaggio del solvente attraverso una membrana semipermeabile può ammettersi dovuto alla evaporazione e alla successiva condensazione del suo vapore entro le vescicole, di cui si può ritenere che tali membrane siano costituite;

III) il risultato I) fornisce un nuovo metodo assai facile per riconoscere l'isotonia di due liquidi: metodo che può trovare utili applicazioni nelle ricerche fisiologiche.

Meccanica. — *Sulle equazioni dell'elasticità.* Nota di E. Almansi, presentata dal Socio Vito Volterra.

1. In alcune mie ricerche sull'equilibrio dei corpi elastici isotropi, ho fatto uso di certe relazioni fra le tensioni interne, le quali, per la loro simmetria, si prestano bene all'esame dello stato di deformazione di un corpo, essendo note le tensioni agenti in superficie.

Riferiti i punti dello spazio ad un sistema di assi ortogonali $O(x, y, z)$, diciamo

$$\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33},$$
$$\tau_{23}, \tau_{31}, \tau_{12},$$

le sei tensioni interne fondamentali. Esse soddisfano le tre condizioni di equilibrio

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} + X = 0, \text{ ecc.} \tag{1}$$

ed altre sei equazioni, a cui, nell'ipotesi che le componenti X, Y, Z della forza di massa unitaria siano costanti, detto λ il *coefficiente di contrazione*, e posto $\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = T$, possiamo dare la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta^2 \tau_{11} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \Delta^2 \tau_{23} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y\, \partial z}, \\ &\Delta^2 \tau_{22} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \Delta^2 \tau_{31} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial z\, \partial x}, \\ &\Delta^2 \tau_{33} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \Delta^2 \tau_{12} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial y}, \\ &\left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Queste sei equazioni si ottengono combinando le equazioni (1) colle altre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\{(1+\lambda)\tau_{11} - \lambda T\}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{E} 2(1+\lambda)\tau_{12}, \text{ ecc.,} \tag{3}$$

(E = cost. = *modulo di elasticità*)

che legano le componenti u, v, w degli spostamenti alle tensioni.

Sono appunto le (2) quelle relazioni fra le tensioni interne a cui accenno sopra, e delle quali più volte mi son valso.

Non ho però mai dimostrato che *qualunque* sistema di sei funzioni regolari $\tau_{11}, \tau_{12} \ldots$ soddisfacenti alle equazioni (1) e (2), corrisponde ad un

possibile stato di deformazione del corpo: che, cioè, *se le equazioni* (1) *e* (2) *sono soddisfatte, esistono sempre tre funzioni* u, v, w *legate alle* $\tau_{11}, \tau_{12} \ldots$ *dalle formule* (3).

Sebbene la dimostrazione non presenti alcuna difficoltà, credo utile esporla in questa breve Nota.

2. Denotiamo con $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} \ldots$ i secondi membri delle formule (3); ossia poniamo

$$(4) \qquad \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\{(1+\lambda)\tau_{11} - \lambda T\} \quad , \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{E} 2(1+\lambda)\tau_{12}, \text{ ecc.}$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di tre funzioni u, v, w, che soddisfino le (3), è espressa dalle sei equazioni:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2}, \text{ ecc.}$$

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x}\right\} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y\, \partial z}, \text{ ecc.}$$

Si tratta dunque di dimostrare che queste sei equazioni, sostituendo alle ε le loro espressioni date dalle formule (4), e tenendo conto delle equazioni (1) e (2) risultano identicamente verificate.

3. Consideriamo l'equazione (5) sopra scritta. Tenendo conto delle (4) e sopprimendo il fattore $\frac{1}{E}$ essa diventa

$$2(1+\lambda)\frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\{(1+\lambda)\tau_{33} - \lambda T\} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\{(1+\lambda)\tau_{22} - \lambda T\},$$

ovvero

$$(7) \qquad 2(1+\lambda)\frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y\, \partial z} = (1+\lambda)\left\{\frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial z^2}\right\} - \lambda\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\}.$$

Ora deriviamo la prima delle equazioni (1) rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, la terza rispetto a z, e sottragghiamo dalla prima le altre due. Otterremo:

$$\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y\, \partial z} = 0.$$

Quindi, sostituendo nella (7) l'espressione di $2\frac{\partial^2 \tau_{23}}{\partial y\, \partial z}$ ricavata da questa:

$$(1+\lambda)\left\{\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial z^2}\right\} =$$

$$= (1+\lambda)\left\{\frac{\partial^2 \tau_{33}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{22}}{\partial z^2}\right\} - \lambda\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\},$$

ossia:

$$\frac{\partial^2\tau_{11}}{\partial x^2}-\left\{\frac{\partial^2\tau_{22}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{22}}{\partial z^2}\right\}-\left\{\frac{\partial^2\tau_{33}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{33}}{\partial z^2}\right\}=-\frac{\lambda}{1+\lambda}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\}.$$

Nel primo membro aggiungo e tolgo $\frac{\partial^2\tau_{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{33}}{\partial x^2}$: avrò

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\Delta^2\tau_{22}-\Delta^2\tau_{33}=-\frac{\lambda}{1+\lambda}\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\}.$$

Sostituendo a $\Delta^2\tau_{22}$ e $\Delta^2\tau_{33}$ le loro espressioni

$$-\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y^{22}} \text{ e } -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

fornite dalla (2), l'equazione precedente si riduce a $\Delta^2 T=0$: equazione che è verificata, come si riconosce dalle stesse (2), sommando le prime tre membro a membro.

4. Consideriamo ora l'equazione (6), che diventa, tenendo conto delle (4),

$$2(1+\lambda)\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\tau_{13}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial z}-\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x}\right\}=2\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\{(1+\lambda)\tau_{11}-\lambda T\},$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\tau_{13}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial z}-\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x}\right\}=\frac{\partial^2\tau_{11}}{\partial y\,\partial z}-\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z}. \tag{8}$$

Dalla equazione (1), derivando la terza rispetto ad y, la seconda rispetto a z, e sommando, si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\tau_{13}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial z}\right\}+\frac{\partial^2(\tau_{22}+\tau_{33})}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\tau_{23}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{23}}{\partial z^2}=0.$$

Aggiungo e tolgo $\frac{\partial^2\tau_{23}}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\tau_{13}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial z}-\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x}\right\}+\frac{\partial^2(\tau_{22}+\tau_{33})}{\partial y\,\partial z}+\Delta^2\tau_{23}=0.$$

Dal confronto di questa colla (8) si ricava:

$$\Delta^2\tau_{23}=-\frac{\partial^2(\tau_{22}+\tau_{33})}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2\tau_{11}}{\partial y\,\partial z}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z}=$$
$$=-\frac{\partial^2(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})}{\partial y\,\partial z}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z}=-\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z}+$$
$$+\frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial x}=-\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z},$$

si ottiene, cioè, una delle equazioni (2).

Quello che si è dimostrato per le equazioni (5) e (6) vale per le altre analoghe. Esistono dunque le funzioni u, v, w. Quindi, conoscendo le tensioni che agiscono sulla superficie di un solido elastico isotropo, soggetto a forze di masse costanti, noi ci possiamo proporre di determinare le tensioni interne in modo che in tutti i punti del solido siano soddisfatte le equazioni (1) e (2), e in superficie le tensioni assumano i valori assegnati.

Le equazioni (2), rispetto ad altri gruppi d'equazioni di cui si può ugualmente far uso (per es. le nostre (7) ed (8) e le loro analoghe), presentano il vantaggio di esser tutte della stessa forma. Se denotiamo con x_1, x_2, x_3 le coordinate x, y, z, possiamo rappresentare le sei equazioni (2) mediante l'unica formula:

$$\Delta^2 \tau_{ij} = -\frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Meccanica. — *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici.* Nota del prof. E. Almansi, presentata dal Socio Vito Volterra.

1. Si consideri un solido elastico isotropo che occupi uno spazio cilindrico S. Diciamo σ le sezioni piane normali all'asse del cilindro (luogo dei baricentri delle sezioni stesse), σ' e σ'' le due sezioni estreme.

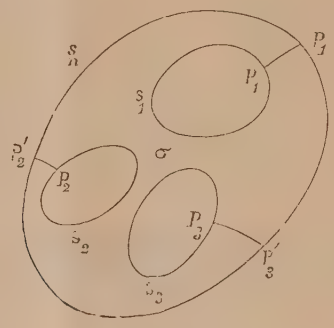


Fig. 1.

Lo spazio S sia a connessione multipla: una sezione σ sarà limitata da un certo numero di linee chiuse, che denoteranno con $s_1, s_2, \ldots, s_n$ (fig. 1).

Riferiamo i punti dello spazio ad una terna di assi ortogonali, prendendo come asse delle z l'asse del cilindro.

Noi ci proponiamo di determinare lo stato più generale di deformazione del solido supponendo:

1°, che i suoi elementi non siano soggetti a forze di massa;

2°, che gli elementi della sua superficie esterna paralleli all'asse (sup. laterale) non siano sollecitati;

3°, che le tensioni interne dipendano dalla sola variabili x, y.

Troveremo che la deformazione più generale soddisfacente a queste condizioni si può scomporre in una deformazione D_0, che rientra nei casi esaminati dal Saint-Venant, ed a cui corrisponderanno, per conseguenza, componenti di spostamento *monodrome*; e in una deformazione D per cui tale condizione non è verificata. Nella deformazione D le sei tensioni interne fondamentali sono espresse dalle formule

$$(1)\quad \tau_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\ ,\quad \tau_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\ ,\quad \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\ ,\quad \tau_{33} = \lambda \Delta^2 \Phi\ ,$$

$$(2)\quad \tau_{31} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\ ,\quad \tau_{32} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\ ,$$

ove Φ è una funzione bi-armonica ($\Delta^2\Delta^2\Phi = 0$) delle variabili x, y; φ una funzione delle stesse variabili che verifica l'equazione $\Delta^2\varphi = k = \text{cost.}$; λ il *coefficiente di contrazione* (1).

2. Le sei tensioni interne devono verificare le tre equazioni

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = 0\ ,\ \ldots\ (\tau_{12} = \tau_{21}\ ,\ \text{ecc.})$$

e le altre sei

$$\Delta^2 \tau_{11} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ ,\quad \Delta^2 \tau_{12} = -\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}, \ldots$$

ove

$$T = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}\,.$$

Da queste ultime si ricava

$$\Delta^2 T = 0\,.$$

Poichè le tensioni non devono contenere la variabile z, le nove equazioni precedenti diventeranno:

$$(3)\quad \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} = 0\ ,\quad \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} = 0\,,$$

$$(4)\quad \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} = 0\,,$$

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta^2 \tau_{11} = -\dfrac{1}{1+\lambda}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, \\ \Delta^2 \tau_{22} = -\dfrac{1}{1+\lambda}\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}\,, \\ \Delta^2 \tau_{12} = -\dfrac{1}{1+\lambda}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}\,, \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} \Delta^2 \tau_{31} = 0\,, \\ \Delta^2 \tau_{32} = 0\,, \\ \Delta^2 \tau_{33} = 0\,, \end{cases}$$

(1) Sulla teoria delle deformazioni regolari a spostamenti polidromi, veggansi le Note del prof. Volterra nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, a. 1904.

Nei punti della superficie laterale (che per ipotesi non è sollecitata), se $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e 0 denotano i coseni della normale (esterna o interna) si dovrà avere:

$$(7)\qquad \begin{cases} \tau_{11}\cos\alpha + \tau_{12}\cos\beta = 0, \\ \tau_{21}\cos\alpha + \tau_{22}\cos\beta = 0, \\ \tau_{31}\cos\alpha + \tau_{32}\cos\beta = 0. \end{cases}$$

3. In virtù delle equazioni (3) potremo porre:

$$\tau_{11} = \frac{\partial \Phi'}{\partial y}\ ,\quad \tau_{12} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\ ,$$

$$\tau_{21} = \frac{\partial \Phi''}{\partial y}\ ,\quad \tau_{22} = -\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\ ,$$

ove Φ' e Φ'' sono funzioni delle variabili x, y. Poichè $\tau_{12} = \tau_{21}$, dovrà essere $-\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = \frac{\partial \Phi''}{\partial y}$, quindi $\Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\Phi'' = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, la Φ essendo una nuova funzione delle stesse variabili. Onde avremo:

$$(8)\qquad \tau_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\ ,\quad \tau_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\ ,\quad \tau_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\ .$$

Ricordiamo ora che si ha $\Delta^2 T = \Delta^2(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = 0$, e, per l'ultima delle (6), $\Delta^2\tau_{33} = 0$; quindi $\Delta^2(\tau_{11} + \tau_{22}) = 0$, e tenendo conto delle formule (8):

$$\Delta^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = 0$$

ovvero, trattandosi di funzioni delle sole variabili x, y

$$(9)\qquad \Delta^2\Delta^2\Phi = 0.$$

Dalle equazioni (8) si ricava:

$$\Delta^2\tau_{11} = \frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial y^2}\ ,\quad \Delta^2\tau_{22} = \frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial x^2}\ ,\quad \Delta^2\tau_{12} = -\frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\ ;$$

e dalla (9): $\frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial x^2}$. Perciò potremo scrivere:

$$\Delta^2\tau_{11} = -\frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial x^2}\ ,\quad \Delta^2\tau_{22} = -\frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial y^2}\ ,\quad \Delta^2\tau_{12} = -\frac{\partial^2 \Delta^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\ .$$

Dal confronto di queste equazioni colle (5), posto

$$(10)\qquad T = (1+\lambda)\Delta^2\Phi + G,\qquad G = G(x, y)$$

abbiamo:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0 .$$

Dovrà dunque essere $G = mx + ny + p$, ove m, n, p denotano delle costanti; e per la formula (10):

$$T = (1 + \lambda) \Delta^2 \Phi + mx + ny + p .$$

Ma $T = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$, e, per le (8), $\tau_{11} + \tau_{22} = \Delta^2 \Phi$; quindi:

$$\tau_{33} = \lambda \Delta^2 \Phi + mx + ny + p$$

Ora notiamo che il sistema di tensioni $\tau_{33} = mx + ny + p$, $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{12} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$ corrisponde ad una deformazione del cilindro che rientra nei casi esaminati dal Saint-Venant. Poichè a noi interessa solo considerare la deformazione D (v. § 1), non la D_0, tralascieremo il termine $mx + ny + p$, ed avremo:

$$\tau_{33} = \lambda \Delta^2 \Phi .$$

Finalmente, per la formula (4) potremo scrivere

$$\tau_{31} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{32} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} , \qquad \varphi = \varphi(x, y) .$$

Le (6), 1ª e 2ª, diventeranno

$$\frac{\partial \Delta^2 \varphi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Delta^2 \varphi}{\partial x} = 0$$

ossia dovrà essere

$$\Delta^2 \varphi = k ,$$

k denotando una costante.

Le nove equazioni (3), (4), (5) e (6) risultano così verificate. Le tensioni interne sono espresse dalle formule (1) e (2) c. v. d.

4. Teniamo conto ora delle condizioni ai limiti. Le formule (7), sostituendo alle tensioni le espressioni trovate, diventano:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \beta = 0 \quad , \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cos \beta = 0 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \beta = 0 .$$

Dovremo dunque avere in ogni punto di una qualsiasi s_i delle n linee chiuse che costituiscono il contorno di una sezione σ, se con s_i denotiamo pure l'arco di quella linea misurato da un punto fisso:

$$(11) \qquad \frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)}{\partial s_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)}{\partial s_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = 0 .$$

Sia s_n quella delle n linee s_i che racchiude tutte le altre. Rendiamo semplicemente connessa la sezione σ mediante $n-1$ tagli congiungenti i punti $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ delle linee $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, coi punti $P'_1, P'_2, \ldots P'_{n-1}$ della linea s_n.

Le tensioni $\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots$, quindi per le formule (1) e (2), le derivate prime della φ e le derivate seconde della Φ, dovranno esser funzioni ad nn sol valore, in tutti i punti di σ; mentre $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ potranno aver valori diversi dalle due parti dei tagli.

Le formule (11) esprimono la condizione che le funzioni $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ devono aver dei valori costanti in ciascuno dei segmenti in cui le n linee chiuse s_i sono divise dai punti P che limitano i tagli.

Ma le $n-1$ linee $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ contengono ciascuna un sol punto P: quindi per ognuna di esse le tre funzioni $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ dovranno ridursi a delle costanti.

Poichè le derivate prime della φ, e le derivate seconde della Φ sono funzioni ad un sol valore in tutti i punti di σ, la differenza fra i valori di $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ dalle due parti di un taglio $P_i P'_i$ dovrà essere la stessa in tutti i punti del taglio, e quindi nulla, essendo nulla nel punto P_i che appartiene ad una delle $n-1$ linee interne $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

Dunque anche $\varphi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ sono funzioni ad un sol valore in tutti i punti di σ, compresa la linea s_n. E in una qualunque s_i delle n linee $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dovrà essere

$$\varphi = q_i \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = , a_i \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = b_i , \tag{12}$$

ove q_i, a_i, b_i rappresentano, per la linea s_i, delle costanti.

Dalle formule (12) si ricava (assegnato convenientemente un verso positivo a ciascuna linea s_i):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_i} = b_i \cos \alpha - a_i \cos \beta = a_i \frac{\partial x}{\partial s_i} + b_i \frac{\partial y}{\partial s_i} = \frac{\partial (a_i x + b_i y)}{\partial s_i}$$

ossia:

$$\frac{\partial (\Phi - a_i x - b_i y)}{\partial s_i} = 0 .$$

Con un ragionamento analogo al precedente troveremo che: $\Phi - a_i x - b_i y$ deve essere una funzione ad un sol valore in tutti i punti di σ, e

costante su ciascuna delle n linee $s_1, s_2, \dots, s_n$. Onde avremo per la linea s_i:

$$\Phi = a_i x + b_i y + c_i \qquad (c_i = \text{cost}). \tag{13}$$

Dalle formule (12), chiamando ν_i, nei punti di s_i, la normale rivolta verso l'interno di σ, si ricava anche:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_i} = \frac{\partial (a_i x + b_i y + c_i)}{\partial \nu_i}. \tag{14}$$

Le condizioni (13) e (14) possono esser sostituite alle (12).

5. Consideriamo la costante

$$M = \int_\sigma (x \tau_{32} - y \tau_{31})\, d\sigma \qquad (\textit{momento torcente}) \tag{15}$$

Se si compone la deformazione da noi esaminata con una semplice *torsione* del cilindro (ciò che non modifica affatto le nostre formule, come si riconosce avendo presenti quelle relative alla torsione semplice) si potrà fare in modo che risulti

$$M = 0.$$

Aggiungiamo questa nuova condizione, che in virtù delle formule (15) e (2), potremo scrivere

$$\int_\sigma \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d\sigma = 0. \tag{16}$$

Essa stabilisce una relazione fra le costante k e q_i, come si vede facilmente ponendo $\varphi = k\varphi' + \varphi''$, ove φ' rappresenti la funzione che verifica nell'area σ l' eq. $\Delta^2 \varphi' = 1$ e si annulla al contorno, quindi φ'' la funzione armonica che sulle linee s_i assume i valori q_i.

Per completare il nostro studio, vogliamo dimostrare che, quando sia soddisfatta anche la condizione (16), *la deformazione da noi considerata non può essere una deformazione a spostamenti monodromi, a meno che tutte le tensioni non siano nulle.*

6. Perciò teniamo conto delle formule

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\tau_{11} - BT\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2A\tau_{12}\,, \text{ ecc. } \left(A, B = \text{cost.}, \frac{B}{A - B} = \lambda\right) \tag{17}$$

che legano le componenti di deformazione alle tensioni.

Introduciamo una funzione armonica $\varphi_1(x, y)$ che soddisfi all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \Delta^2 \Phi.$$

È sempre possibile determinare una tal funzione in un'area σ_0 limitata da un segmento rettilineo s' parallelo all'asse delle y (fig. 2), da due segmenti s'', s''' (eventualmente nulli) pure rettilinei e paralleli all'asse delle x, e da una linea s'''' che sia incontrata in un sol punto da ogni parallela al detto asse. E si potrà sempre decomporre l'area σ in un certo numero di aree come σ_0.

Sulle linee di separazione fra le aree σ_0, la funzione φ_1 e le sue derivate potranno presentare delle discontinuità.

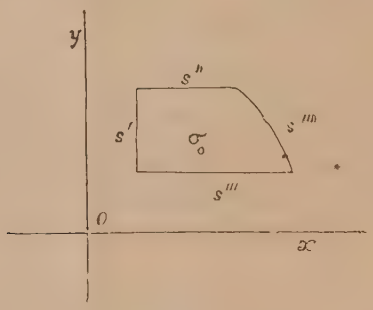


Fig. 2.

Introduciamo anche la funzione $\varphi_2(x, y)$ legata alla $\varphi(x, y)$ dalle equazioni

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{k}{2} y \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{k}{2} x ,$$

che sono compatibili fra loro, poichè $\Delta^2 \varphi = k$.

Sarà facile verificare che le formule (17) risultano verificate quando si ponga

$$(18) \qquad \begin{cases} u = -A \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + C \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + A k y z , \\ v = -A \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} - C \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} - A k x z , \qquad C = \dfrac{A(A - 2B)}{A - B} . \\ w = 2A \varphi_2 . \end{cases}$$

Supponiamo di rendere semplicemente connesso lo spazio S occupato dal cilindro, mediante $n - 1$ tagli T_i formati da superficie Σ_i parallele all'asse e passanti per le linee $P_i P_i'$ (§ 4) tracciate sopra σ. Poichè le tensioni interne, e quindi le componenti di deformazione, sono monodrome, noi potremo disporre dell'arbitrarietà che permane nelle funzioni φ_1 e φ_2 in modo che gli spostamenti u, v, w non presentino discontinuità fuori delle superficie Σ_i.

Per dimostrare che u, v, w non possono esser continue in tutta l'area σ, a meno che tutte le tensioni non siano nulle, consideriamo la quantità essenzialmente positiva o nulla

$$Q = \int_\sigma \left\{ \tau_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + \tau_{23} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \tau_{31} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} d\sigma ,$$

che si riduce a zero solo coll'annullarsi di tutte le tensioni. Dico che se u, v, w sono continue, dovrà essere $Q = 0$.

Si ha infatti in tale ipotesi

$$\int_\sigma \left\{ \tau_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} d\sigma = 0 ,$$
$$\int_\sigma \left\{ \tau_{31} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{32} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} d\sigma = 0$$

come si riconosce integrando per parti, e tenendo conto delle equazioni (3) e (4), e delle condizioni (7) ai limiti.

Inoltre, per la formola (18), $\frac{\partial u}{\partial z} = A k y , \frac{\partial v}{\partial z} = - A k x , \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$ quindi

$$Q = A k \int_\sigma (y \tau_{31} - x \tau_{32}) \, d\sigma = - A k M = 0 , \quad \text{(v. § 5)}$$

c. v. d.

Matematica. — *Esperienze illustrative per la teoria del Volterra su l'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi.* Nota di Luigi Rolla, presentata dal Socio V. Volterra.

Matematica. — *Encore une observation sur les fonctions dérivées.* Nota di Henri Lebesgue, presentata dal Socio C. Segre.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Storia della scienza — *Leonardo da Vinci*. Lettera indirizzata al PRESIDENTE dal prof. S. DUHEM.

Je vous serais très reconnaissant de bien vouloir, en mon nom, faire hommage à l'Académie d'un ouvrage intitulé: *Etudes sur Léonard de Vinci, ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu Première série.*

Ces études ont pour objet, d'une part, de mettre en évidence l'influence exercée sur les découvertes de Léonard par sa connaissance très profonde de la science du moyen-âge et, d'autre part, de découvrir par quels heureux plagiats plusieurs de ces découvertes ont penétré dans la science du XVI^{e} siècle.

La présente série étudie seulement trois des sources auxquelles Léonard a puisé; ce sont un traité *De ponderibus* fort lu au moyen-âge, et les écrits de deux maîtres qui enseignaient au XIV^{e} siècle, à l'Université de Paris: Albert de Saxe et Thémon le fils du Juif.

Elle a également occasion de dénoncer trois savants du XVI^{e} siècle comme ayant emprunté aux notes de Léonard; ce sont J. B. Villalpand, Bernardino Baldi et Girolamo Cardano.

Parmi les découvertes suggérées à Léonard par l'étude de la science médiévale et qu'il a, à son tour, suggérées à la science moderne, nous pouvons mentionner la notion du centre d'oscillation, le principe de Pascal, enfin les idées fondamentales de la stratigraphie.

Je serais heureux que l'Académie jugeât que l'intérêt de ces études excuse la témérité que j'ai eue de les lui offrir.

Geologia. — *Avanzi preistorici nel travertino dell'Acqua dei Corsari presso Palermo*. Nota del dott. EMANUELE SALINAS, presentata dal Socio G. STRÜVER.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Le correnti di Foucault nel nucleo conduttore interno ad un solenoide percorso da corrente alternata.* Nota di F. Piola, presentata dal Corrispondente A. Sella.

I signori Battelli e Magri hanno studiato matematicamente (1) come l'intensità di una corrente *sinusoidale*, percorrente un solenoide, venga modificata dalla presenza di un'anima di ferro nel solenoide stesso. Essi hanno trattato in particolare modo i casi limiti di frequenze molto piccole e molto grandi, ed hanno sottoposto quest'ultimo caso ad esperienze (2) usando, per produrre le correnti oscillatorie, scariche di condensatori e trascurando lo smorzamento delle oscillazioni stesse, ed hanno ottenuto conferma alle loro illazioni.

L'influenza che il nucleo esercita sull'intensità della corrente che percorre il solenoide dipende, oltre che dalla sua permeabilità, dalle correnti di Foucault che si generano nel nucleo le quali fanno che gli strati esterni esercitino una azione di *schermo* al penetrare del campo negli strati profondi, schermo insormontabile, come ha mostrato il Maxwell (3) nei mezzi di conducibilità elettrica infinita. Questa azione fa che il flusso di induzione magnetica non si distribuisca uniformemente nella sezione e molti fisici si sono proposti di determinarlo sperimentalmente: scopo della presente Nota è determinarlo teoricamente in forma finita, in *ampiezza* e *fase*, nel caso che la corrente sia dovuta ad una f. e. m. sinusoidale. In altra prossima Nota sarà trattato il caso nel quale la corrente sia dovuta a scarica di un condensatore.

Le ipotesi che ammetteremo saranno le solite e cioè:

a) che il campo magnetico sia parallelo all'asse del nucleo cilindrico, supponendo quindi che fra il nucleo ed il solenoide esista uno spazio sufficiente per poter trascurare l'andamento vorticoso delle linee di forza magnetica.

b) che sia costante la permeabilità del mezzo.

Il nucleo sia formato da un fascio di ν fili uguali lunghi l e ciascuno del raggio di r cm. La sostanza della quale sono fatti i fili abbia la permeabilità μ, supposta costante, e la resistenza specifica δ. Il solenoide, lungo quanto i fili, e della sezione retta S abbia n spire disposte uniformemente per modo che per ogni cm. se ne abbiano:

$$n_1 = \frac{n}{l}.$$

(1) Rend. Lincei, XV, 2° sem., 1906, pag. 153.
(2) Rend. Lincei, XV, 2° sem. 1906, pag. 397.
(3) Paris, 1887, T. 2°, pag. 326.

La frequenza della corrente, per quanto elevata, sia tale che la lunghezza d'onda ad essa relativa superi notevolmente la lunghezza del filo che costituisce il solenoide e quindi si possa considerare il campo magnetico risultante come avente la stessa fase in tutta la lunghezza del nucleo.

Il campo magnetico nell'interno di un conduttore soddisfa alla nota equazione differenziale

$$\Delta^2 V = m \frac{\partial V}{\partial t} \tag{1}$$

avendo posto

$$m = \frac{4\pi\mu}{\delta}. \tag{2}$$

Indicate con X, Y, Z le componenti del campo rispetto a tre assi ortogonali e preso quello delle x coincidente coll'asse del solenoide sarà, per le ipotesi fatte:

$$\Delta^2 X = m \frac{\partial X}{\partial t} \qquad Y = Z = 0. \tag{3}$$

Se i fili sono abbastanza lunghi per poter trascurare nello spazio compreso fra essi l'azione smagnetizzante degli estremi, il campo magnetico nell'interno di ciascun filo sarà simmetrico intorno all'asse del filo stesso, che è parallelo all'asse delle x, e quindi la (3) potrà scriversi, in coordinate cilindriche,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial X}{\partial \varrho} = m \frac{\partial X}{\partial t} \tag{4}$$

dove ϱ rappresenta il raggio vettore nella sezione retta di ciascun filo.

Il flusso di induzione magnetica, traversante la sezione retta del solenoide, si potrà considerare come dovuto alla somma $N = N_1 + N_2$ dei flussi traversanti rispettivamente l'aria ed il ferro.

Sarà

$$N_1 = 4\pi n n_1 (S - \nu\pi r^2) j = L_1 j \tag{5}$$

ed

$$N_2 = n\mu\nu \int_s X ds \tag{6}$$

avendo indicato con j la corrente elettrica traversante il solenoide, con s la sezione di ciascun filo del nucleo e con L_1 il coefficiente di autoinduzione corrispondente alla porzione di sezione retta non occupata dai fili.

L'integrale che comparisce nella (6) può essere trasformato in altro rispetto al tempo che meglio si presta al calcolo. Infatti, derivando rispetto a t e ricordando la (3), avremo:

$$\frac{d}{\partial t}\int_s X\,ds = \int_s \frac{\partial X}{\partial t}\,ds = \frac{1}{m}\int_s \Delta^2 X\,ds.$$

D'altra parte, pel teorema di Green relativo a 2 variabili,

$$\int_s \Delta^2 X\,ds = \int_\lambda \frac{\partial X}{\partial \varrho}\,d\varrho$$

dove $\frac{\partial X}{\partial \varrho}$ è la derivata di X, secondo la normale al contorno λ della sezione, presa verso l'*esterno*, e l'integrale del 2° membro si intende esteso al contorno stesso. Ma, tutto essendo simmetrico rispetto all'asse del filo, $\frac{\partial X}{\partial \varrho}$ sarà costante lungo il cammino di integrazione ed avremo:

$$\int_\lambda \frac{\partial X}{\partial \varrho}\,d\varrho = \frac{\partial X}{\partial \varrho}\int_\lambda d\varrho = 2\pi\varrho\,\frac{\partial X}{\partial \varrho}$$

per cui

$$\int_s \frac{\partial X}{\partial t}\,ds = \frac{2\pi\varrho}{m}\,\frac{\partial X}{\partial \varrho}$$

ed infine:

$$\int_s X ds = \frac{2\pi\varrho}{m}\,\frac{\partial}{\partial \varrho}\int X dt \tag{7}$$

a meno di una costante arbitraria (costante non solo rispetto a t ma anche a ϱ).

La (6) potrà allora scriversi:

$$N_2 = \frac{2\pi r\, n\nu\mu}{m}\left[\frac{\partial}{\partial \varrho}\int X dt\right]_{\rho=r} \tag{8}$$

Alla superficie dei fili il campo è quello dovuto al solenoide e quindi

$$X_{\rho=r} = 4\pi n_1 j\,. \tag{9}$$

Indicata con ε la f. e. m. esterna applicata agli estremi del rocchetto e con R la resistenza elettrica *effettiva*, nel senso dato da lord Kelvin a questa parola, avremo alla superficie, cioè per $\varrho = r$

$$\varepsilon = Rj + \frac{dN}{dt} = Rj + \frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt}$$

e per la (9) potremo scrivere

$$\varepsilon = \frac{R}{4\pi n_1} X + \frac{L_1}{4\pi n_1} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{2\pi r\, n\nu\mu}{m} \frac{\partial X}{\partial \varrho}. \tag{10}$$

Ponendo

$$L_2 = 4\pi n n_1 \mu \,.\, \nu \,.\, \pi r^2,$$

ossia indicando con L_2 il valore che avrebbe il coefficiente di auto-induzione in corrispondenza alla porzione di sezione retta occupata dai fili se il campo in essi si distribuisse uniformemente, la (10) diverrà:

$$\left[RX + L_1 \frac{\partial X}{\partial t} + L_2 \frac{2}{mr} \frac{\partial X}{\partial \varrho} \right]_{\varrho = r} = 4\pi n_1 \varepsilon. \tag{11}$$

Il 2° termine dal 1° membro della (11) potrà trascurarsi tutte le volte che l'area della sezione occupata dai fili e la permeabilità di essi sarà grande, rispetto all'area occupata dall'aria ed alla permeabilità di questa. In tal caso saremo quando il fascio sarà ridotto ad un solo nucleo massiccio di ferro occupante tutto il solenoide.

Supponendo la f. e. m. periodica, potremo esprimere questa con una serie della forma

$$\varepsilon = \sum_{p=1}^{p=\infty} \varepsilon_p = \sum_{p=1}^{p=\infty} A_p\, e^{ip\,\omega t} \tag{12}$$

con A_p costante *complessa*, ω costante *reale* che rappresenta la frequenza $\frac{2\pi}{T}$ corrispondente al periodo più lungo, ed i simbolo dell'immaginario.

A f. e. m. periodica corrisponderà campo magnetico pure periodico e potremo scrivere:

$$X = \sum_{p=1}^{p=\infty} X_p = \sum_{p=1}^{p=\infty} B_p\, e^{ip\,\omega t} \tag{13}$$

con B_p espressione *complessa* indipendente da t. Nella (13) ciascun termine dovrà soddisfare alla (4) ed è facile vedere che questa condizione sarà soddisfatta quando ciascuna B_p soddisfi alla equazione differenziale:

$$\frac{d^2 B_p}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dB_p}{d\varrho} = ip\, m\omega\, B_p$$

o, ponendo:

$$q_p^2 = pm\omega\varrho^2, \quad \text{per cui} \quad \frac{d}{d\varrho} = \sqrt{pm\omega}\, \frac{d}{dq_p}$$

alla:

$$\frac{d^2 B_p}{dq_p^2} + \frac{1}{q}\frac{dB_p}{dq_p} = i B_p.$$

Questa ammette per integrale generale

$$B_p = X_{0p} J_0(q_p) + Y_{0p} K_o(q_p) \quad (14)$$ (1)

dove

X_{0p} ed Y_{0p} sono costanti ed J_0 e K_0 sono le funzioni, rispettivamente interna ed esterna, di Bessel d'ordine zero dell'argomento

$$q_p^1 = \sqrt{ip\,m\omega}\,\varrho$$

Poichè a noi interessa lo spazio occupato da ciascun filo, cioè quello spazio nel quale può divenire ϱ, e quindi q, zero, sarà $Y_{0p} = 0$ e l'integrale generale si ridurrà al solo 1° termine della (14) nel quale alla costante X_{0p} dovrà essere dato il valore che risulterà dalle condizioni ai limiti. Avremo:

$$X = \sum_{p=1}^{p=\infty} X_{0p} J_0(q_p)\, e^{ip\,\omega t}. \quad (15)$$

La condizione alla superficie espressa dalla (11) diverrà

$$\sum_{p=1}^{p=\infty}\left[\left\{RX_p + L_1\frac{\partial X_p}{\partial t} + L_2\frac{2}{mr}\frac{\partial X_p}{\partial \varrho}\right\}_{\varrho=r} - 4\pi n_1 \varepsilon_p\right] = 0 \quad (16)$$

ossia:

$$\sum\left[X_{0p}\left\{(R + ip\omega L_1) J_0(q_p) + p\omega L_2\frac{2}{q_p}\frac{d J_0(q_p)}{dq_p}\right\}_{\varrho=r} - 4\pi n_1 A_p\right] e^{ip\,\omega t} = 0 \quad (17)$$

e dovendo essere verificata per qualunque valore di t, avrà nulli tutti i coefficienti dei singoli esponenziali per cui darà tante equazioni quanti saranno i termini che vorremo considerare nelle serie.

Ora il coefficiente di X_{0p} nella (17) non può essere nullo poichè ciò verrebbe a dire che il corrispondente termine della espressione del campo, nel quale è immerso il nucleo, dovrebbe essere indipendente dal tempo, contro l'ipotesi, il che si vede chiaramente supponendo $L_1 = o$ e pensando alla analogia della (16) colla equazione alla superficie nella trasmissione del calore (2), dove al rapporto fra la conduttività *esterna* ed *interna* sia

(1) J. J. Thomson, Rec. Researches, pag. 263.

(2) Fourier, *Opere*, t. 1°, cap. 6°.

stato sostituito $\frac{mr\mathrm{R}}{2\mathrm{L}_2}$. Da questa osservazione deriva che, se una A_x è nulla, lo sarà la corrispondente X_{0p}, e se tutte le A_p, meno una, saranno nulle, ossia se la f. e. m. sarà *sinusoidale*, sarà pure sinusoidale il campo magnetico da essa prodotto.

Campo magnetico. Nell'ipotesi sinusoidale le (12), (15), (17), ponendo $p = 1$, diventano:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \, e^{i\omega t} \tag{18}$$

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_0 \, \mathrm{J}_0 \, e^{i\omega t} \tag{19}$$

$$\mathrm{X}_0 \left\{ (\mathrm{R} + i\omega \mathrm{L}_1) \, \mathrm{J}_0 + \omega \mathrm{L}_2 \frac{2\mathrm{J}_0^1}{q} \right\}_{\varrho = r} = 4\pi n_1 \varepsilon_0 \tag{20}$$

dove s'è scritto ε_0 al posto di A_1 ed X_0 al posto di X_{01}. Inoltre s'è indicato con J_0^1 la derivata di J_0 rispetto a q dove:

$$\mathrm{J}_0 = \mathrm{ber}\, q + i \, \mathrm{bei}\, q = \mathrm{J} \, e^{i\psi}$$

con

$$\mathrm{ber}\, q = 1 - \frac{q^4}{(2 \,.\, 4)^2} + \frac{q^8}{(2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8)^2} \cdots\cdots$$

$$\mathrm{bei}\, q = \frac{q^2}{2^2} - \frac{q^6}{(2 \,.\, 4 \,.\, 6)^2} + \frac{q^{10}}{(2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10)^2} \cdots\cdots$$

avendo adottato le notazioni di lord Kelvin (1) ed avendo posto

$$\mathrm{J} = \sqrt{\mathrm{ber}^2 q + \mathrm{bei}^2 q} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\, \psi = \frac{\mathrm{bei}\, q}{\mathrm{ber}\, q}$$

Nel seguito indicheremo con $\mathrm{ber}' q$ e $\mathrm{bei}' q$ le derivate prime, rispetto all'argomento q, rispettivamente di $\mathrm{ber}\, q$ e $\mathrm{bei}\, q$.

Poichè per $t = 0$ e $\varrho = 0$ la (19) diventa

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_0 ,$$

X_0 non è che il campo magnetico sull'asse del cilindro al tempo zero.

Dalla (20), separando la parte reale dalla immaginaria ed indicando con φ la fase di X_0 rispetto ad ε_0, ossia del campo sull'asse rispetto a quella della f. e. m., facilmente si trae:

$$\mathrm{mod}\, \mathrm{X}_0 = \frac{4_1 \pi n_1 \ \mathrm{mod.}\ \varepsilon_0}{\sqrt{\left\{ \mathrm{R}\,\mathrm{ber} - \omega \left(\mathrm{L}_1 \,\mathrm{bei} - \mathrm{L}_2 \frac{2\,\mathrm{ber}'}{q} \right) \right\}^2 + \left\{ \mathrm{R}\,\mathrm{bei} + \omega \left(\mathrm{L}_1 \,\mathrm{ber} + \mathrm{L}_2 \frac{2\,\mathrm{bei}'}{q} \right) \right\}^2}} \quad \text{per } \varrho = r \tag{21}$$

$$\mathrm{tg}\, \varphi = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{bei} + \omega \left(\mathrm{L}_1 \,\mathrm{ber} + \mathrm{L}_2 \frac{2\,\mathrm{bei}'}{q} \right)}{\mathrm{R}\,\mathrm{ber} - \omega \left(\mathrm{L}_1 \,\mathrm{bei} - \mathrm{L}_2 \frac{2\,\mathrm{ber}'}{q} \right)} \quad \text{per } \varrho = r . \tag{22}$$

(1) *Mathematical and Physical Papers*, vol. III, pag. 491.

La (19) può scriversi:

$$X = JX_0 e^{i(\omega t+\psi)} \tag{23}$$

da cui:

$$\mathrm{mod}\, X = J \,\mathrm{mod}\, X_0 \tag{24}$$

e ψ differenza di fase fra il campo in un punto qualsiasi del cilindro e quello sull'asse. Dalla tav. I, calcolata coi dati tratti dalle tavole di lord Kelvin, si scorge chiaramente come J vada rapidamente crescendo con $q = \sqrt{m\omega}\,\varrho$ o, in altre parole, l'ampiezza del campo vada rapidamente diminuendo, come è noto, col penetrar nell'interno del cilindro e tanto più quanto più elevata è la frequenza, la permeabilità e la conduttività. La tavola stessa ci mostra come $\mathrm{tg}\,\psi$ vada, coll'aumentare di q, e quindi di ϱ, cambiando alternativamente di segno, spiegando le magnetizzazioni di segno opposto riscontrate da più sperimentatori, sciogliendo in un acido un nucleo di ferro magnetizzato per mezzo di correnti alternate di grande frequenza.

Tav. I.

q	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	8,0	10,0	15,0	20,0
J	1,00	1,00	1,02	1,08	1,23	1,51	1,96	2,58	3,44	4,62	6,23	8,45	11,50	41	150	4200	50000
$\mathrm{tg}\,\psi$	0	0,06	0,25	0,61	1,29	3,64	-8,75	-1,91	-0,89	-0,39	-0,02	0,35	0,83	-1,67	0,40	1,00	0,24

Flusso di induzione. Il flusso di induzione magnetica traverso una sezione retta di raggio ϱ, fatta in uno dei fili, lo otterremo dalla (8) nella quale si introduca il valore (19) del campo e si faccia $\nu = 1$. Avremo:

$$N = -iX_0 \frac{n\delta}{2\omega} q \frac{dJ_0}{dq} e^{i\omega t} \tag{25}$$

dove s'è fatta $= 0$ la costante intesa nella (7) poichè, al limite per $\varrho = 0$, deve essere $N = 0$. Confrontando la (25) colla (19) potremo scrivere:

$$N = -iX \frac{n\delta q}{2\omega} \frac{\mathrm{ber}'\, q + i\,\mathrm{bei}'\, q}{\mathrm{ber}\, q + i\,\mathrm{bei}\, q}$$

od anche:

$$N = nX \,.\, \pi\varrho^2 \,.\, \mu \,.\, \frac{2(\mathrm{bei}'q - i\,\mathrm{ber}'q)}{q(\mathrm{ber}\, q + i\,\mathrm{bei}\, q)} \,. \tag{26}$$

Ponendo:

$$J^1 = \sqrt{\mathrm{ber}'^2 q + \mathrm{bei}'^2 q}$$

ed indicando con Φ la differenza di fase fra il flusso N ed il campo X al contorno, avremo:

$$\mathrm{mod}\, N = n \,\mathrm{mod}\, X \,.\, \pi\varrho^2 \,.\, \mu \,.\, \frac{2J^1}{qJ} \tag{27}$$

$$\mathrm{tg}\,\Phi = -\frac{\mathrm{ber}\,\mathrm{ber}' + \mathrm{bei}\,\mathrm{bei}'}{\mathrm{ber}\,\mathrm{bei}' - \mathrm{bei}\,\mathrm{ber}'} \,. \tag{28}$$

La (27) ci indica che l'ampiezza del flusso magnetico è quella che si avrebbe, se il campo avesse in tutta la sezione del filo il valore che ha al contorno, ma moltiplicato per il numero:

$$(29) \qquad g = \frac{2J^1}{qJ} = \frac{2\sqrt{ber'^2 + bei'^2}}{q\sqrt{ber^2 + bei^2}}$$

La (28) esprime il ritardo Φ col quale il flusso *segue* il campo al contorno del nucleo.

Nella Tav. II sono calcolati alcuni valori di g e tg Φ e si vede come, col crescere di q, g vada rapidamente diminuendo e tg Φ avvicinandosi all'unità, cioè lo sfasamento ad $\frac{1}{8}$ di periodo.

Tav. II.

q	0	1	2	3	4	5	6	8	10	20
g	1,00	0,99	0,85	0,61	0,46	0,37	0,32	0,24	0,19	0,01
$-\text{tg}\Phi$	0	0,14	0,44	0,71	0,82	0,85	0,87	0,91	0,93	0,97

Poichè tanto g che Φ sono funzioni della sola q, si vede che per ridurre il flusso nello stesso rapporto o per ottenere uguali sfasamenti, con cilindri di sostanze differenti e con oscillazioni della stessa frequenza, occorre prendere le sezioni di quelli proporzionali a $\frac{\delta}{\mu}$. Per avere lo stesso effetto con la stessa sostanza ma con frequenze differenti, le sezioni dovranno essere in ragione inversa delle frequenze.

In particolare, prendendo pel ferro $\delta = 10^4$ e $\mu = 10^3$, per cui $\frac{\delta}{\mu} = 10$, e pel rame $\delta = 1600$ e $\mu = 1$, per cui $\frac{\delta}{\mu} = 1600$ si otterrà la stessa riduzione di flusso, che si ottiene con un cilindro di ferro, prendendone uno di rame avente una sezione 160 volte maggiore, ossia un raggio 12,65 volte maggiore. Con frequenza di 50 oscillazioni al 1^s avremo pel ferro $q_1 = \sqrt{m\omega}\,\varrho = \sqrt{\frac{4\pi\mu}{\delta} \cdot 2\pi \cdot 50}\;\varrho = 20 \cdot \varrho$ circa e con frequenza 5.10^5 $q = 2000\,\varrho$ circa, per cui per ridurre il flusso (Tav. II) a circa $\frac{1}{3}$ del valore che avrebbe se il campo avesse in tutta la sezione il valore che ha al contorno, occorre un cilindro di ferro del diametro di 5 mm. con frequenza 50, e ne basta uno di $\frac{5}{100}$ di mm. con frequenza di $\frac{1}{2}$ milione.

Se invece di considerare un solo filo del nucleo considereremo tutti i ν *fili*, l'*ampiezza* del flusso verrà moltiplicata per ν, ma la *fase* rimarrà invariata. Ne segue che variando il numero di fili tutti uguali contenuti in un solenoide non veniamo ad influire sulla fase del flusso magnetico ma solo sulla sua ampiezza, e di ciò sarà tratto partito nella verifica sperimentale alla quale intendo sottoporre questi calcoli.

In alcuni casi limiti le formule che abbiamo scritte assumono una forma molto semplice ed esprimono proprietà note.

Per ω molto piccolo, q riesce pure molto piccolo, e poichè, per $q = 0$, si ha:

$$\operatorname{ber} q = 1 \qquad \operatorname{bei} q = 0$$
$$\frac{2\operatorname{ber}' q}{q} = 0 \qquad \frac{2\operatorname{bei}' q}{q} = 1,$$

il radicale che entra nella (21) si riduce sensibilmente a $\sqrt{R^2 + \omega^2 (L_1 + L_2)^2}$ ossia:

« Per oscillazioni molto lente il campo sull'asse del nucleo ha lo stesso « valore che avrebbe se il nucleo non esistesse ».

Per ω molto grande, q lo sarà pure e poichè $\operatorname{ber} q$ e $\operatorname{bei} q$ non diventano contemporaneamente infinitamente piccoli, il radicale diverrà molto grande e però: « Per oscillazioni sufficientemente rapide il campo sull'asse « del nucleo è nullo ».

Quando la resistenza specifica cresce infinitamente, q diviene infinitesimo, e però:

$$J = 1 \qquad g = 1.$$

In tal caso il nucleo non viene a produrre alcuna influenza, ossia il campo in un punto interno qualsiasi ha lo stesso valore di quello al contorno: infatti mancando il conduttore interno al solenoide le correnti di Foucault non possono nascere ed è eliminata l'azione di *schermo*.

Fisica. — *Le correnti di Foucault nella scarica di un condensatore.* Nota di F. Piola, presentata dal Corrispondente A. Sella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla radioattività delle lave del Vesuvio* [1]. Nota di O. Scarpa, presentata dal Corrispondente M. Cantone.

1. Fra le poche misure della radioattività delle lave e dei prodotti vulcanici pospliocenici, sono anzitutto da notare quelle di Elster e Geitel [2], specialmente interessanti poichè mostrarono attivissime le terre superficiali di Capri [3], provenienti in gran parte dalle eruzioni dei Flegrei.

Gli A. usando 125 gr. di sostanza osservarono le seguenti dispersioni:

Solfato di uranile e potassio	3600	volt all'ora
Cenere vulcanica di Ischia	11,4	»
» » dell'Etna	2,0	»
Lapilli dell'Etna	1,1	»
Lava di Nicolosi (Etna).	2,7	»
Terre arabili di Capri	26,8	»
Argille superficiali di Capri	101,8	»
Pozzolana di Capri	23,3	»

Il prof. Sella e il dott. Martinelli [4] studiarono i prodotti vulcanici della Campagna romana; operando con 20 gr. di sostanza essi trovarono le dispersioni:

Nitrato di uranile	2400	volt in 15′
Pozzolane dei pressi di Roma . . .	1 a 3	»
Tufi	1 a 3	»
Lave.	0,7 a 1,4	»

I prodotti dell'Etna furono specialmente studiati dal dott. Trovato Castorina [5] che in due serie di misure ottenne in unità empiriche:

I.

Terra arabile di Capri [6].		4,31	g. 125
REGIONE ETNEA	Argille.	1,8	»
	Pozzolane. . . .	1,6 a 3,6	»
	Sabbie.	1 a 2	»
	Lave	1 a 1,2	»

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di fisica tecnica della R. Scuola superiore politecnica di Napoli.

(2) Phys. Z. 5, 1904.

(3) Il Giesel, Phys. Z. 1905, operando su 40 kg. di terra di Capri, ha potuto estrarre una sostanza del peso di 0,15 g. che dava all'elettroscopio di E. e G. la dispersione di 192000 volt all'ora.

(4) Rendiconti R. Acc. Lincei, 1904, due Note.

(5) Atti Acc. Gioenia, Catania, LXXXIV e LXXXVI, 1905.

(6) Questa è la stessa terra arabile studiata da Elster e Geitel.

II.

Terra arabile di Capri.		26,5
REGIONE ETNEA	Lave	5 a 10
	Tufi	5 a 20
	Pomici, scorie e lapilli . . .	0 a 8
	Argille	10 a 23

Il sig. Tommasina (1) esaminò i prodotti della eruzione del Vesuvio del 1904; ma disgraziatamente egli non dà le caratteristiche dei suoi strumenti, e nemmeno riporta esperienze eseguite con sostanze di nota radioattività.

I prodotti della eruzione vesuviana dell'aprile di questo anno furono studiati dal sig. Becker (2) e dal prof. Nasini (3) che pur esaminò numerose lave più antiche; ma il Becker, che usò un elettroscopio di Curie, operò con quantità molto variabili in peso, e talvolta con sostanze persino non polverizzate.

Ecco alcuni dei suoi risultati:

Sostanza	Corrente di saturazione riferita a 1 g. di sostanza
Solfato di uranile e potassio (g. 3,2).	338.10^{-15} Amp.
Cenere 8/9 aprile raccolta a Ischia (g. 14). . .	0,076 »
» 10/11 » » » (g. 29). . .	0,065 »
Lava (Torre Annunziata) (g. 80)	0,057 »
» » » (g. 68)	0,045 »
» » » (g. 38)	0,064 »

Il prof. Nasini operò invece col metodo di E. e G. su 125 g. di sostanza polverizzata e asciutta; e misurò le correnti di saturazione, che in parte ho ricalcolate riferendole a un g. della sostanza.

Uranio metallico (4)	376.10^{-15} Amp.
Sabbie e lapilli dell'eruzione aprile 1906 (5) .	da 0,14 »
	a 0,27 »
Blocchi e lave rigettate ora dal cratere. . . .	($< 0{,}036.10^{-15}$ Amp.)
Lave della presente eruzione	»
Lave, sabbie e lapilli del 1872	da $0{,}08.10^{-15}$ Amp.
	a 0,10 »

(1) Phys. Z. 6, 1905.
(2) Annalen der Physik, 20, 3, 1906.
(3) Nasini e Levi, Atti R. Acc. Lincei, ottobre 1906.
(4) Da una misura su 5 g.
(5) Due fra le ultime ceneri diedero rispettivamente $0{,}11.10^{-15}$ e $0{,}068.10^{-15}$ Amp.

Lave di eruzioni precedenti (1631-1767-1858-	da	$0{,}08.10^{-15}$ Amp.
1868-1895-1899).	da	0,038 »
	a	0,18 »
Prodotti antichi del Somma e del Vesuvio. .	da	0,07 »
	a	0,08 »
Tufi di Ercolano e di S. Domenico (Somma) . .	da	0,63 »
	a	0,40 »

Il prof. Nasini quindi conclude facendo osservare la inattività delle lave attuali, che contrasta con quella dei prodotti antichi, e specialmente con quella delle ceneri e dei lapilli della presente eruzione: i quali però (come è ben noto) provengono per la massima parte da prodotti di eruzioni precedenti accumulati nel condotto del vulcano.

2. Io ho sperimentato, negli scorsi mesi di maggio e di agosto, con parecchi campioni di ceneri, di lapilli e lave della eruzione dell'aprile 1906 e con qualcuno di quella del settembre 1904 che, secondo i vulcanologi, fa pur parte del ciclo eruttivo ora chiuso.

Le ceneri furono raccolte sul Vesuvio e a Napoli, quelle sul Vesuvio le raccolse il prof. Mercalli su un tavolo di marmo nell'orto dell'albergo « L'eremo » nella escursione che il 13 aprile u. s. (cioè mentre durava la violenta fase vulcaniana della eruzione) abbiamo compiuta spingendoci fin presso alla stazione inferiore della funicolare cioè alle falde del gran cono.

Là abbiamo incontrati i residui della enorme frana che ne distrusse quattro giorni prima il fabbricato, e questi mi fornirono campioni di lava coeva e di grossi lapilli.

Le altre lave le raccolsi io pure a Torre Annunziata, a Bosco tre Case e altrove, quella tolta dalla bocca inferiore di Bosco Cognoli la devo alla cortesia del dott. T. Viglino.

I prodotti della eruzione del 1904 furono invece raccolti dal prof. R. Matteucci che li donò anni or sono a questo Istituto di Fisica tecnica.

Per le esperienze ho usato un elettrometro a induzione (1) costituito da due dischi di ottone, paralleli e coassiali e disposti in piani verticali, fra i quali pende un dischetto di alluminio (l'ago) che è sospeso nel punto mediano del sistema con un bifilare di bozzolo.

Posi la cassa e uno dei dischi a terra, l'altro lo unii invece al piatto isolato di un condensatore ad aria, di cui l'altro piatto (posto a terra) sostiene la sostanza (quasi sempre 100 g.) finemente polverizzata.

L'ago è disposto col suo piano a 45° su quello dei piatti, cosicchè le sue deviazioni, che osservai con scala e cannocchiale, sono proporzionali al quadrato della differenza di potenziale esistente fra i dischi.

(1) Prof. L. Lombardi, *Fenomeni di polarizzazione in un campo elettrostatico uniforme.* Memorie della R. Accademia di Torino, Serie II, 1895.

Caricai il sistema con la differenza di potenziale della rete stradale a 220 volt, e osservai le perdite di carica, con e senza la sostanza, nell'intervallo di un'ora partendo sempre dalla stessa deviazione iniziale (corrispondente a 210 volt).

Se C indica la capacità del sistema (piatti e elettrometro) nel quale il potenziale diminuisce di dv nel tempo dt, la corrente di scarica è data in ogni istante da

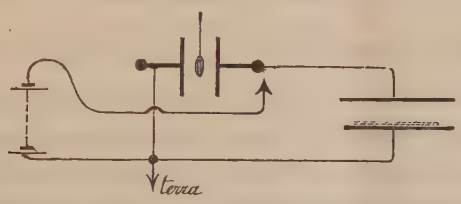
$$i = -C\frac{dv}{dt}.$$

e poichè si conviene di misurare la radioattività delle sostanze mediante le perdite di carica che in certi sistemi causano le loro radiazioni in un dato tempo, quando la corrente di scarica ha e mantiene il valor limite che si chiama *corrente di saturazione*, la precedente equazione integrata con la condizione $i =$ costante, permette senz'altro di calcolare la corrente di scarica che è proporzionale alla detta perdita.

È questa corrente che io ho assunta come misura della radioattività, riferendola però all'unità di peso delle sostanze agenti.

I piatti del dispersore hanno 8.5 cm. di raggio, sono distanti 4,1 cm.; la capacità totale del sistema, nelle stesse condizioni delle esperienze è di 0,92 10^{-11} Farad.

Il seguente schema dà un'idea della disposizione sperimentale.



I valori medî delle serie di osservazioni sono:

PRODOTTI DELL'ERUZIONE DI APRILE 1906.

Sabbia nericcia raccolta sul Vesuvio. Caduta il 4/5 aprile (1).	$i = 0{,}30.10^{-15}$ Amp.
Sabbia rossiccia raccolta sul Vesuvio (strato intermedio).	0,13 »
Sabbia più chiara raccolta sul Vesuvio caduta il 1 1/12 aprile	0,09 »
Sabbia nericcia raccolta a Napoli la notte del 4/5 aprile	0,07 »
Sabbia rossiccia raccolta a Napoli i giorni 12 e 13 aprile	0,06 (?) »

(1) Misura eseguita con 35 g. di sostanza.

Lava raccolta sulla bocca di Bosco Cognoli ai primi di maggio	$i = 0{,}30.10^{-15}$ Amp.
	0,12 »
Lava raccolta a Torre Annunziata il 16 aprile	0,05 »
Lava raccolta sopra Boscotrecase il 16 aprile	0,04 (?) »
Lava coeva tolta da un blocco (bomba?) della frana vicino alla stazione inferiore della funicolare, il 13 aprile	0,06 »
Lapilli e scorie tolte dalla stessa frana il 13 aprile 1906	0,10 »
Lapilli raccolti a Ottaiano	0,15 »
Lapilli raccolti sulla vetta del Somma ai primi del giugno 1906 (1)	da 0,09 a 0,06

Prodotti dell'eruzione del settembre 1904.

Sabbia	$0{,}18.10^{-15}$ Amp.
Lava a corde	0,09 »
Lava scoriacea	0,26 »
Bomba di lava coeva	0,20 »

Ho anche sperimentato con dell'ossido verde di uranio ($U_3 O_8$) che ho preparato arroventando l'uranato di ammonio in corrente di ossigeno (2); esso mi diede in media la corrente di saturazione:

$i = 765.10^{-15}$ Amp. riferita al solito a 1 g. di sostanza

3. Non è però facile, e purtroppo non è nemmeno possibile con un certo rigore, di confrontare fra di loro i precedenti risultati, poichè le dispersioni e le correnti di saturazione che dipendono, e in misura ignota, dallo spessore della sostanza cimentata (e probabilmente pur dalla forma del campo elettrostatico del sistema dispersore) furono misurate usando differenti quantità delle sostanze.

Così per i composti puri di uranio ricordo ad esempio che il prof. Nasini ottenne la corrente di saturazione 376.10^{-15} Amp. riferita a 1 g. con dell'uranio, e il Becker ottenne 338.10^{-15} Amp. riferita a 1 g. con il solfato di uranile e potassio (3); la signora Curie (4) ottenne invece $\frac{23}{7} = 3{,}3$ come rapporto delle loro radioattività, mentre il rapporto stesso calcolato in base alle quantità di uranio contenuto sarebbe 2,4! E, infatti, è noto quanto è

(1) Ne furono esaminati due campioni differenti.

(2) Zimmermann, Liebig's Annalen, CCXXXII, 1886.

(3) Essi ottennero rispettivamente $1880\,10^{-15}$ Amp. con 5 g. di uranio a $1080\,10^{-15}$ Amp. con 3,2 g. di solfato di uranile o potassio.

(4) S. Curie, *Recherches sur les substances Radioactives*, Paris 1904, pag. 14.

grande l'assorbimento che i composti di uranio esercitano sulle loro radiazioni (1).

Un fenomeno simile avviene anche per le sostanze del tipo delle terre, per le quali sono da ricordare le ricerche che il prof. Vicentini compì nel suo accuratissimo studio sui materiali dei colli Euganei.

Da una tavola grafica esistente in una delle sue Note (2) io ho dedotto p. e. i seguenti valori:

Fanghi di Montegrotto.

Apparecchio di Elster e Geitel leggermente modificato (B)

Massa di fango g.	Spessore mm.	Dispersione volt per ora	Dispersione calcolata per 1 gr. di fango
1	—	5	*5*
10	1 (?)	13	*1,3*
50	3	45	*0,9*
100	5,5	78	*0,78*
150	8	105	*0,70*
550	30	209	*0,38*

E perciò come è possibile di confrontare rigorosamente i risultati di sperimentatori che usarono, anche per i campioni, qualità e quantità di materia tanto differenti e con spessori tanto diversi?

Ma è evidente (sebbene fin'ora pare sia sfuggito) che senza un confronto, almeno grossolano, i precedenti risultati hanno assai poco significato. Dovendo scegliere un unico termine di confronto, ho creduto conveniente di riferire la radioattività delle sostanze cimentate a quella dell'uranio, usufruendo perciò delle misure che i diversi autori hanno pur eseguito sui suoi composti; cosa possibile poichè essendo l'uranio un elemento radioattivo, si può (per analogia con i fenomeni studiati nei composti del radio) ammettere che la sua attività e quella dei suoi composti sia proprietà del suo atomo.

Quindi io ho eseguito il rapporto fra le dispersioni (o le correnti di saturazione) causate dai prodotti vulcanici, e quelle ipotetiche che sarebbero state invece causate da un egual peso di uranio. Ma mi affretto a ripetere che tali calcoli sono soltanto utili per dare un'idea dell'ordine di grandezza delle attività delle sostanze esaminate.

Eccone ad esempio alcuni:

Elster e Geitel trovarono i rapporti delle radioattività (misurate dalle dispersioni) di ceneri e lave e di eguali pesi di solfato di uranile e potassio

(1) S. Curie, ibid., pag. 15.

(2) Atti Istituto Veneto, LXIV, 2, 1904-1905.

($SO_4 UO_2 . SO_4 K_2 . 2H_2O$) varianti da $\frac{1}{3600}$ a $\frac{10}{3600}$ arrivando per le terre di Capri fino a $\frac{100}{3600}$ circa. Gli stessi rapporti calcolati rispetto a eguali pesi di uranio diventano da $\frac{1.1}{10000}$ a $\frac{11}{10000}$ fino a $\frac{110}{10000}$.

E valori simili ottenne a quanto pare il Castorina per i prodotti dell'Etna.

Becker ottenne invece per eguali quantità di ceneri e lave del Vesuvio (ultima eruzione) e dello stesso sale, rapporti compresi fra $\frac{7}{33800}$ e $\frac{4}{33800}$ che calcolati rispetto all'uranio rispettivamente diventano: $\frac{1}{10000}$ e $\frac{0.5}{10000}$.

Il prof. Nasini confrontando le sostanze direttamente con dell'uranio ottenne dei risultati dai quali si possono calcolare per eguali quantità in peso i rapporti: per le sabbie e i lapilli della presente eruzione

$$\text{da } \frac{2.7}{3760} \text{ a } \frac{1.4}{3760} \text{ cioè da } \frac{7}{10000} \text{ a } \frac{3.7}{10000};$$

invece egli trovò le lave recenti inattive, cioè per esse un rapporto minore di $\frac{1}{10000}$, mentre per le lave delle precedenti eruzioni, i rapporti si aggirano intorno a $\frac{3}{10000}$.

Io, confrontando le ceneri e le lave della presente eruzione con l'ossido verde di uranio, ottenni per eguali quantità in peso rapporti compresi fra $\frac{3}{7650}$ e $\frac{0.5}{7650}$ che, calcolati rispetto all'uranio, diventano:

$$\text{da } \frac{3.3}{10000} \text{ a } \frac{0.5}{10000}.$$

Dalle esperienze del prof. Sella e del dott. Martinelli sui prodotti vulcanici della Campagna romana confrontati col nitrato di uranile ($(NO_3)_2 UO_2 . 6H_2O$), si ottengono i rapporti da $\frac{3}{2400}$ a $\frac{1}{2400}$ che, ricalcolati rispetto all'uranio, dànno da $\frac{9}{10000}$ a $\frac{3}{10000}$.

Ricapitolando si ha approssimativamente:

RADIOATTIVITÀ DEI PRODOTTI DELLA RECENTE ERUZIONE DEL VESUVIO.

Becker (ceneri e lave) da 1.10^{-4} a $0.5.10^{-4}$ rispetto all'uranio
Scarpa (ceneri, lapilli e lave) da $3.3.10^{-4}$ a $0.5.10^{-4}$ »
Nasini (ceneri e lapilli) da 7.10^{-4} a $3.7.10^{-4}$ »
» (lave) $< 1.10^{-4}$.

RADIOATTIVITÀ DI PRODOTTI VULCANICI DIVERSI.

Terre di Capri più attive (E. e G.) 110 10^{-4} rispetto all'uranio
Campagna romana (S. e M.) da 9.10^{-4} a 3.10^{-4} »
Cenere vulcanica di Ischia (E. e G.) 12.10^{-4} »
Etna vecchie e recenti eruzioni (E. e G. e Castorina) da 22.10^{-4} a 1.10^{-4} rispetto all'uranio.
Vesuvio precedenti eruzioni (Nasini) 3.10^{-4} rispetto all'uranio
» » » (Scarpa) $2{,}5.10^{-4}$. »

Disposti così i risultati riesce evidente che:

1°) Salvo le terre eccezionali di Capri, *in generale questi prodotti vulcanici hanno radioattività comprese fra circa un millesimo e un mezzo decimillesimo di quella dell'uranio.*

2°) *Sembra confermata la maggiore attività dei prodotti delle vecchie eruzioni.*

È poi da osservare che la radioattività di questi prodotti vulcanici è superiore a quella che dovrebbe competere in media alle roccie superficiali per il radio che esse contengono.

Strutt infatti (1) e Eve (2) trovarono rispettivamente che ogni cm^3 della crosta superficiale della terra contiene in media $2{,}5.10^{-12}$ e $1{,}06.10^{-11}$ g. di radio.

Supponendo che la attività del radio sia circa 10^7 volte quella dell'uranio (3) ne viene che, in causa dell'assorbimento delle radiazioni esercitato dalla stessa sostanza (4), la radioattività media delle roccie superficiali sarebbe, per quanto riguarda il radio, certamente inferiore a un decimillesimo di quella dell'uranio.

Ma evidentemente non è possibile di dedurre dai risultati precedenti (come fece il Becker) la quantità di radio contenuta in ogni cm^3 delle lave o degli altri prodotti vulcanici; tanto più che siccome l'analisi rivela (specialmente per il Vesuvio) l'esistenza di un numero enorme di elementi, torna lecito il dubbio che pur varie sieno le sostanze radioattive.

(1) Proc. R. Soc. Londra, maggio e settembre 1906. Io ho corretto il risultato di Strutt ($5{,}10^{-12}$ g. per cm^3), poichè 1 g. di uranio deve supporsi in equilibrio con $3{,}8.10^{-7}$ g. di radio (Rutherford e Boltwood, Le Radium, luglio 1906. Eve, Phyl. mag., sett. 1906) e non già con $7{,}4.10^{-7}$ come prima era ammesso.

(2) Phyl. mag., 6, XII, 1906.

(3) Dai risultati della signora Curie e da quelli di Rutherford e Boltwood (loc. cit.).

(4) Rutherford, *Radioactivity*, Cambridge, 1904.

Chimica-fisica. — *Influenza della formalina sul potere rotatorio del glucosio in rapporto alla teoria della multirotazione* (1). Nota di Gabriele Landini, presentata dal Socio A. Ròiti.

1. L'aggiunta di formalina a soluzioni di saccarosio, oltre che rallentare l'azione catalitica degli H·-ioni sulla inversione, produce delle notevoli anomalie, in quanto che l'andamento della reazione

$$C_{12}H_{22}O_{11} + H_2O = 2C_6H_{12}O_6$$

non è più esprimibile colle note formule delle reazioni monomolecolari.

Per consiglio del dott. Ugo Grassi impresi a studiare a quali cause potesse attribuirsi questa singolare discordanza.

Le esperienze in proposito furono condotte osservando il potere rotatorio delle soluzioni col sussidio di un polarimetro di Laurent, a due campi (precisione 1'), il cui tubo era chiuso in un manicotto entro al quale si faceva circolare, a mezzo di una turbina, l'acqua di un termostato, regolato con termoregolatore a xilolo. La temperatura del tubo subiva così delle oscillazioni di $\pm 0°,1$ al massimo.

Sperimentato dapprima su di un sistema costituito da 25 cm³ di una soluzione al 20 % di saccarosio cristallizzato, ai quali si aggiungevano 20 cm³ di acido cloridrico (1.031 N) e 10 cm³ di formalina (40 %), si ottennero i seguenti valori:

t Tempo in minuti	Δ Lettura al polarimetro	θ Temperatura d'osservazione	K
3m	+ 21°,300	29°,95	10^{-3} 2,277
9	20,533	»	» 2,120
14	20,000	»	» 2,288
20	19,167	»	» 2,405
24	18,567	»	» 2,504
32	17,467	»	» 2,569
45	15,833	»	» 2,662
134	7,567	»	—
∞	— 3,567	»	—

(1) Le ricerche furono eseguite nel Laboratorio di Fisica del R. Istituto di Studî superiori in Firenze

La costante d'inversione K fu calcolata colla nota formula

$$\frac{\lg(\Delta_m - \Delta_\infty) - \lg(\Delta_n - \Delta_\infty)}{t_n - t_m} = 0{,}4343\, K$$

nella quale si è introdotto per la rotazione corrispondente allo stato finale il valore:

$$\Delta_\infty = -3°{,}567$$

che si è dovuto determinare sperimentalmente conservando alla temperatura θ d'osservazione, per circa nove giorni, un sistema uguale al precedente, in fiala saldata alla lampada; poichè in questo caso non si poteva ricorrere alla formula (1):

$$\Delta_\infty = \Delta_0(0{,}44 - 0{,}005\,\theta)$$

La costante K d'inversione mostra da 14^m in poi un aumento progressivo che non è certamente attribuibile ad errori di osservazione, ma piuttosto ad una azione esercitata dalla formalina o direttamente sul saccarosio o sui suoi prodotti di scissione.

Anche in soluzioni di saccarosio, senz'aggiunta di acido cloridrico, si riscontra già il fenomeno come risulta dalla seguente tabella:

40 cm^3 formalina + 10 cm^3 soluzione di saccarosio (50 %)

Tempo	Δ Lettura al polarimetro	θ Temperatura	Tempo	Δ Lettura al polarimetro	θ Temperatura
2^m	+ 26°,667	40°	25^m	28°,533	40°
4	27,000	»	50	29,233	»
10	27,450	»	137	30,033	»

E l'aumento del potere rotatorio è tanto più singolare, in quanto che la formalina usata presenta alla barite (indicatore fenolftaleina) un'acidità pari a 0.0105 N che, per la sua azione catalitica, avrebbe dovuto favorire la inversione, facendo così diminuire, o almeno rimanere pressochè costante il potere rotatorio dello zucchero.

2. Di più facile interpretazione dovevano riuscire le esperienze fatte sul solo glucosio o levulosio.

Si hanno già delle esperienze abbastanza complete dovute a Ina A. Milroy (2) intorno all'azione esercitata da alcoli, aldeidi, acetoni e da acidi

(1) Ostwald-Luther. Messungen, 1902.
(2) Z. f. phys. Chem. *50*, 1904.

e sali minerali sul potere rotatorio degli zuccheri. I risultati di tali ricerche si possono in breve così riassumere.

Gli acidi inorganici ed i sali che reagiscono, sia neutri che acidi, producono un lieve aumento della rotazione.

Sostanze organiche neutre agiscono alla stessa maniera, colla sola differenza che la variazione avviene in modo più lento. Le basi organiche, o i sali con reazione basica, producono invece una diminuzione.

La formalina era peraltro esclusa da questo studio di Milroy, e fu perciò istituita una serie di ricerche allo scopo di precisarne l'influenza tanto più che, trattandosi del primo termine delle aldeidi della serie grassa, il suo comportamento poteva per avventura differenziarsi da quello delle aldeidi omologhe.

Il glucosio presenta notoriamente il fenomeno della multirotazione: ossia il suo potere rotatorio molecolare, che è inizialmente 105°, scende col tempo a 52°,5 seguendo la legge logaritmica di Wilhelmy (1).

È noto che, in base specialmente a ricerche di Tanret (1), si è venuti nella idea che esistano del glucosio tre modificazioni isomere α, β e γ; labili la prima e l'ultima, e stabile la β. Talchè una soluzione fresca di $\alpha[105°]$ o di $\gamma[25°,2]$ si trasforma spontaneamente fino a contenere la sola forma stabile β.

Le ricerche di Milroy si riferiscono sempre a soluzioni contenenti la modificazione β.

Una prima serie delle presenti ricerche si riferisce pure a soluzioni di glucosio che hanno raggiunto il valore definitivo.

Le soluzioni adoperate erano daprima separatamente portate alla temperatura di osservazione, alla quale si trovava già il tubo polarimetrico, ove si introducevano appena mescolate, e i tempi si contavano dal momento in cui era fatta la miscela.

25 cm³ soluz. di glucosio (10 %) + 25 cm³ formalina (acidità 0,0105 N)

Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura	K	Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura	K
4m	+ 10°,318	40°	—	203m	12°,760	40°	10^{-3} 3,216
9	10,643	»	10^{-3} 9,406	268	12,973	»	» 2,997
20	10,811	»	» 4,593	335	13,214	»	» 3,197
35	11,000	»	» 3,397	398	13,270	»	» 2,980
56	11,270	»	» 2,890	483	13,285	»	» 2,504
81	11,646	»	» 3,066	∞	13,485	»	—
103	11,908	»	» 3,059	—	—	—	—

(1) Landolt, *Das optische Drehungvermögen*, 1898.

(2) C. R. t. 120, pag. 1060.

25 cm³ soluz. glucosio (10 %) + 25 cm³ formalina (acidità 0,021 N)

Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura	K	Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura	K
6m	+ 10°,500	40°	—	185m	13°,100	40°	10^{-3} 6,291
23	11,033	»	10^{-3} 5,395	365	13,217	»	» 4,256
34	11,350	»	» 5,601	480	13,233	»	» 3,420
54	11,933	»	» 6,904	∞	13,300	»	—
92	12,533	»	» 6,539	—	—	»	—

I numeri sotto il segno K rappresentano i valori della espressione:

$$[1] \qquad \frac{\lg(\Delta_\infty - \Delta_0) - \lg(\Delta_\infty - \Delta_1)}{t_1 - t_0}$$

e dovrebbero essere costanti nella ipotesi che una molecola della forma β (che secondo la teoria solita della multirotazione dovrebbe esistere da sola nella soluzione di glucosio adoperata) entrasse a costituire colla formalina, che si trova in grande eccesso, un composto qualsiasi la cui natura non è il caso di precisare.

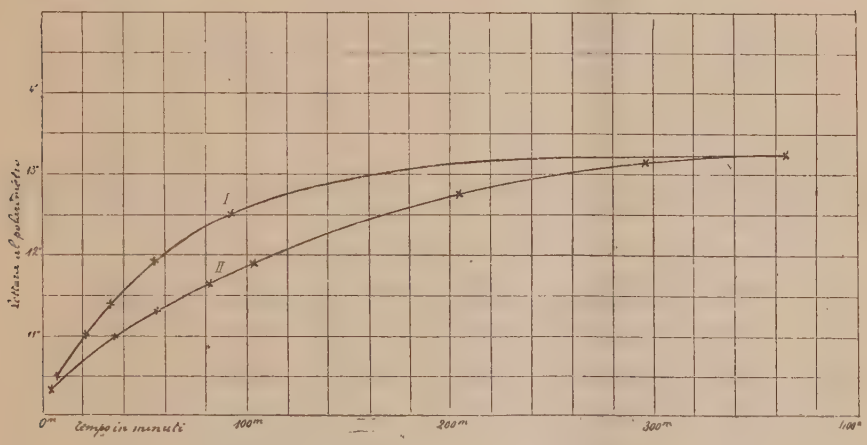


Fig. 1.

E neppure, ammessa l'analogia tra queste esperienze e quelle di Milroy, può accettarsi la spiegazione di un semplice spostamento dell'equilibrio tra le forme α e β, giacchè nell'un caso e nell'altro, per le leggi che regolano la cinetica delle reazioni monomolecolari, la espressione [1] dovrebbe esser costante.

Un'altra spiegazione, che resulta immediatamente dall'esame delle due curve (fig. 1) rappresentanti l'andamento del fenomeno e che non sembra

sia stata ancora suggerita, è la funzione catalitica degli H·-ioni, assai analoga a quella che interviene nella multirotazione. Difatti nella curva I che a parità delle altre condizioni, è ottenuta con un'acidità doppia che non per la II, si tende al valore finale con maggior rapidità che non nella curva II ottenuta con l'acidità esistente nella formalina usata, pari a 0,0105 N.

Ma le esperienze che sembrano decidere anche maggiormente circa alla ipotesi di Milroy sono quelle ottenute con soluzioni di glucosio contenenti la forma α.

La prima esperienza fu condotta neutralizzando parzialmente (circa $^2/_3$) con NaOH, l'acidità preesistente nella formalina.

25 cm³ soluz. fresca di glucosio (10 %) + 25 cm³ formalina (acidità 0,0035 N)

Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura	Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura
10m	+ 17°,200	40°	55m	13°,800	40°
19	16,700	»	65	13,483	»
25	16,017	»	85	13,133	»
35	15,083	»	110	12,950	»
45	14,367	»	230	12,867	»

25 cm³ soluz. fresca di glucosio (10 %) + 25 cm³ formalina (acidità 0,0105 N)

Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura	Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura
5m	+ 18°,467	40°	68m	12°,433	40°
10	17,417	»	83	12,333	»
15	16,400	»	98	12,367	»
20	15,233	»	118	12,500	»
28	14,100	»	138	12,567	»
38	13,200	»	168	12,817	»
48	12,600	»	208	13,000	»
58	12,467	»	∞	13,717	»

25 cm³ soluz. fresca di glucosio (10 %) + 25 cm³ formalina (acidità 0,021 N)

Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura	Tempo	Lettura al polarimetro	Temperatura
5m	+ 18,167°	40°	52m	12,717°	40°
7	17,033	»	67	12,700	»
10	16,417	»	97	12,900	»
14	15,517	»	207	13,117	»
19	14,717	»	297	13,133	»
25	13,967	»	482	13,150	»
32	13,367	»	∞	13,300	»
40	12,950	»	—	—	—

Le curve corrispondenti, che sono distinte coi numeri I, II e III della fig. 2, presentano, oltre alla solita azione catalitica degli H·-ioni, un anda-

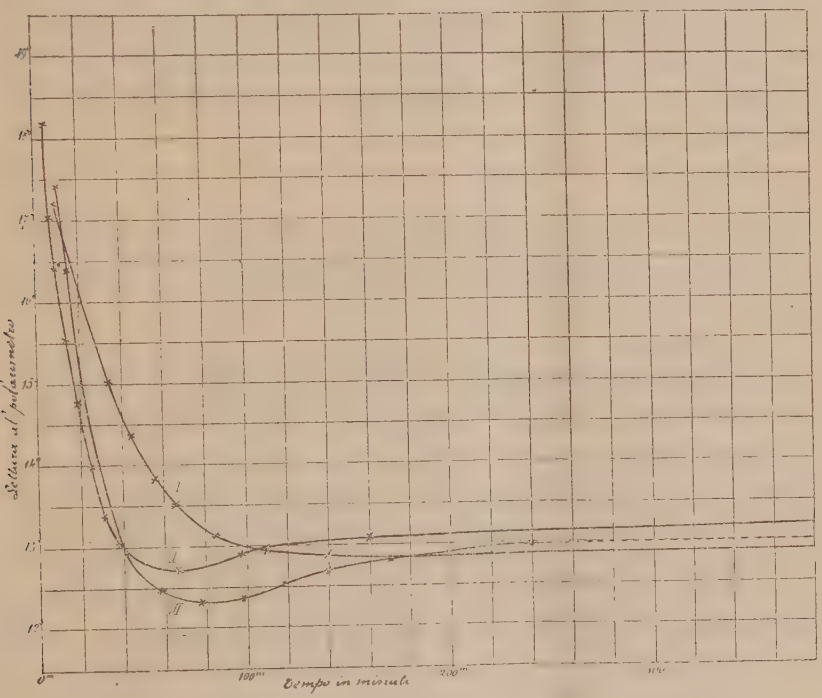


Fig. 2.

mento che non è assolutamente conciliabile con una semplice trasformazione della modificazione α del glucosio nella modificazione β, qualunque sia la ipotesi che si voglia fare intorno ai valori delle costanti di equilibrio.

3. In un recente lavoro Jungius [1] avanza la idea che, come fu trovato sperimentalmente per gli zuccheri lattici da Hudson [2], anche per il glucosio, le soluzioni della forma chiamata β da Tanret, consistano in uno stato di equilibrio *incompleto* tra le due forme isomere α e γ del glucosio.

Si tratterebbe in ultima analisi di sostituire all'idea dell'equilibrio completo, per il quale dalla forma α si dovrebbe passare totalmente alla β, quella di equilibrio incompleto tra la α e la γ; idea che trova un appoggio nel fatto che le due costanti che regolano le due trasformazioni

$$\alpha \rightleftharpoons \beta \quad \text{e} \quad \gamma \rightleftharpoons \beta$$

hanno lo stesso valore [3].

Accettata tale ipotesi, si avrebbe nel caso nostro che una delle due forme α e γ, coesistenti in equilibrio nella soluzione, o ambedue, darebbero origine, con la formalina aggiunta, a nuovi composti la cui natura non è necessario precisare; e la variazione del potere rotatorio osservata sarebbe dovuta alla loro graduale formazione.

Lo studio, che il dott. Grassi ha già in corso, della variazione col tempo del potere rotatorio di soluzioni di glucosio contenenti aldeide acetica, sussidiato dalle note formule della chimica cinetica, potrà forse portare ad una conferma della idea di Jungius, che per ora sembra la più probabile.

Chimica. — *Analisi dei prodotti siderurgici ad elevato tenore in Cromo* [4]. Nota di Gino Gallo, presentata dal Socio E. Paternò.

La determinazione del cromo nei prodotti siderurgici, ha acquistato una notevole importanza da quando si sono riconosciute le buone qualità che questo elemento comunica all'acciajo.

Nell'analisi di tali prodotti però è necessario distinguere due casi: quando cioè il cromo entra in proporzioni basse come dal 0,2 al 4 %, e quando invece, come nei ferri cromati, la sua proporzione giunga perfino al 75 %. Nel primo caso il metallo è attaccato facilmente dagli acidi, e nella soluzione ottenuta si può dosare il cromo separandolo dal ferro e dagli altri elementi, mediante sua ossidazione a cromato per via secca o per via umida con un agente ossidante; nel secondo caso invece, di leghe ricche in

(1) ZS. f. phys. Chem. *52*, 1905.

(2) ZS. f. phys. Chem. *44*, 1903.

(3) ZS. f. phys. Chem. *55*, 1905.

(4) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica applicata della R. Scuola per gli Ingegneri di Roma.

cromo, la soluzione riesce molto difficile, poichè queste non vengono completamente attaccate dagli acidi, ed è quindi necessario ricorrere alla disgregazione per via secca con un fondente speciale. La ricerca di un fondente più adatto al trattamento di tali leghe, ha interessato diversi sperimentatori e parecchi sono i reattivi che furono proposti.

La fusione con bisolfato potassico (1) che viene spesso impiegato riesce solo con acciai al 15-20 % di Cromo; oltre a questo si ricorre anche al miscuglio di nitrato sodico e carbonato sodico, di idrato potassico e nitrato potassico (2), di idrato potassico e clorato (3), alla magnesia sodata (4), ed infine al perossido di sodio. Questo ultimo reattivo, impiegato di recente, permette di ottenere in modo molto rapido un attacco completo del ferro cromato, e la trasformazione contemporanea del cromo in cromato. Però esso presenta l'inconveniente di attaccare fortemente il crogiuolo in cui si fa la operazione; il platino disciolto per ogni fusione varia da 100 a 150 mmg. L'impiego di un crogiuolo di argento sarebbe più economico, ma quando il tenore in cromo oltrepassa il 35 %, il grande svolgimento di calore che accompagna l'ossidazione del metallo, provoca la fusione del crogiuolo stesso; fu proposto più vantaggiosamente l'impiego di un crogiuolo di nichel, ma in tal caso, l'operazione riesce molto più complicata, perchè bisogna ricorrere a delle lunghe e noiose separazioni del nichel, non si può procedere alla determinazione di questo elemento quando esso sia contenuto nel metallo da analizzare, e ad ogni modo un crogiuolo non può servire per più di 8 o 10 fusioni.

Dallo studio di questi varî metodi proposti per le analisi di leghe ricche in cromo, si possono dedurre le seguenti osservazioni: 1) Il metallo deve essere finissimamente polverizzato e setacciato, 2) si deve ricorrere a due e più fusioni, 3) i crogiuoli vengono in generale profondamente attaccati.

La polverizzazione minuta quale è richiesta di un ferro cromato, è una operazione oltremodo lunga e difficile, data l'estrema durezza di tali prodotti; non si può ammettere poi, che il setacciamento a cui comunemente si ricorre, ci possa fornire una polvere perfettamente corrispondente al campione, perchè è naturale che per fenomeni di liquazione possano esistere dei noduli a diversa concentrazione in cromo, di durezza per conseguenza diversa, e che quindi resistendo più a lungo all'azione triturante, vengono separati mediante il setaccio dal resto della polvere proveniente dalla massa metallica meno dura e quindi meno ricca in cromo.

Le fusioni poi per via secca, riescono sempre noiose e difficili; la massa rigonfia spesso e sale lungo le pareti del crogiuolo fino ad uscirne; gli

(1) Zeigler, Dyngler polyt. Jour. CCLXXV, pag. 91.
(2) Id. 1891, pag. 163.
(3) Laboratorio dello Stab. St. Jacques a Mont Luçon.
(4) Clark, Stahl und Eisen, 1893, pag. 393.

schizzi, che inevitabilmente si hanno specialmente negli attacchi rapidi e vivaci, conducono bene spesso a perdite che costringono a ricominciare l'operazione; nella maggior parte dei casi è necessario ripetere parecchie volte la fusione del residuo, senza raggiungere qualche volta lo scopo dell'attacco completo. Infine il deterioramento che vengono a subire i crogiuoli di platino, specialmente quando, come qualcuno propone, si fa l'attacco con idrati alcalini, è di un'entità tale, che certo merita di esser preso in considerazione, dato l'enorme prezzo attuale di questo metallo.

Fu in seguito a tutto questo che io mi proposi di studiare un metodo di attacco dei ferri cromati, più semplice e più economico di quelli conosciuti finora.

Il metodo che io propongo si fonda sul seguente principio.

Sottoponendo all'elettrolisi, alla temperatura di 80°-85° una soluzione di cloruro potassico al 15 %, leggermente alcalina per idrato potassico, impiegando come polo negativo un filo di platino, e come polo positivo il metallo da analizzare, quest'ultimo si *decompone completamente*, e tutto il ferro si precipita allo stato di idrato ferrico mentre il cromo resta in soluzione allo stato di cromato.

Le reazioni che avvengono in tali condizioni sono le seguenti:

Al polo positivo il cloroione mettendosi in libertà agisce nel seguente modo:

$$\begin{cases} 2Fe + 3Cl_2 = 2FeCl_3 \\ FeCl_3 + 3KOH = Fe(OH)_3 + 3KCl \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2Cr + 3Cl_2 = 2Cr\,Cl_3 \\ Cr\,Cl_3 + 3KOH = 3KCl + Cr(OH)_3 \\ Cr(OH)_3 + 3KOH = Cr(OK)_3 + 3H_2O \\ 2Cr(OK)_3 + 3Cl_2 + 4KOH = 6KCl + 2H_2O + 2K_2\,Cr\,O_4 \end{cases}$$

e nel caso in cui siano presenti contemporaneamente altri elementi come il manganese ed il nichel, questi reagiscono nel seguente modo:

$$\begin{cases} Mn + Cl_2 = Mn\,Cl_2 \\ Mn\,Cl_2 + 2KOH = Mn\,Nn(OH)_2 + 2KCl \\ Mn(OH)_2 + 2KOH + Cl_2 = 2KCl + H_2O + Mn \begin{matrix} OHN \\ = O \\ OH \end{matrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ni + Cl_2 = Ni\,Cl_2 \\ NiCl_2 + 2KOH = Ni(OH)_2 + 2KCl \\ 3Ni(OH)_2 + 2KOH + Cl_2 = 2Ni(OH)_3 + 2K\,Cl \end{cases}$$

A sua volta il potassio-ione, portandosi al polo negativo e mettendosi qui in libertà, reagisce con l'acqua

$$2K + 2H_2O = 2KOH + H_2$$

Allo scopo quindi di evitare che l'idrogeno che si svolge al polo negativo per questa reazione secondaria, eserciti un'azione riducente sul cromato che va formandosi, s'introduce il polo negativo stesso, costituito da un filo di platino avvolto a spirale, entro un cilindretto di porcellana porosa di Pukal.

Quanto al metallo che si deve attaccare, e che viene impiegato come polo positivo, è necessario distinguere il caso in cui esso si abbia allo stato di trucioli o grani, oppure allo stato di bastoncino compatto. In questa seconda condizione, basta sospendere il bastoncino nell'interno della soluzione, mediante un filo di platino, che stabilisce la comunicazione col polo positivo.

Nel caso più comune invece, in cui il campione risulti costituito da trucioli o da grani di dimensioni diverse, ho trovato dopo opportune modificazioni, che può servire bene il seguente semplice apparecchino.

Si ricorre ad un tubo di vetro piegato ad U (vedi fig.) di cui il braccio più corto è allargato alla parte superiore, e termina inferiormente a forma di cono dal cui vertice esce la punta di un filo di platino, che dall'altra parte mediante mercurio stabilisce la comunicazione col polo positivo. In questo allargamento s'introduce il metallo pesato, destinato alla soluzione, avendo l'avvertenza di adattarlo bene sul fondo, in modo che stabilisca un buon contatto colla punta di filo di platino, e funzioni quindi esso stesso da elettrodo positivo. Al di sopra del metallo, si adatta un piccolo disco di porcellana forato, che si può ricavare intagliando uno dei dischi che servono per i crogiuoli di Gook. Questo disco ha lo scopo di evitare che le bollicine dei gas che si svolgono, trascinino con sè i granelli più piccoli del metallo fuori del tubo che lo contiene. Il disco stesso può essere tenuto compresso mediante un tubicino di vetro, collocato verticalmente nell'interno, il quale agisce continuamente col proprio peso.

La quantità di soluzione di cloruro potassico da impiegarsi è di circa 50 cc. per ogni decigrammo del metallo; impiegandone una quantità minore, il volume del precipitato che va formandosi, e che è spesso molto grande, rende la soluzione così densa da turbare l'andamento regolare dell'elettrolisi. Per ogni 100 cc. della soluzione si aggiungono poi circa 2 cc. di soluzione di idrato potassico al 20 %. La soluzione viene introdotta in un bicchiere di grandezza conveniente, ed in essa si fanno pescare da una parte il metallo da analizzare in comunicazione col polo positivo, dall'altra il polo

negativo che peschi solo per 2 o 3 cm., ed introdotto, come dissi già, in un cilindretto di Pukal. Si copre il bicchiere con un vetro d'orologio tagliato in modo da lasciare il passaggio agli elettrodi e ad un termometro.

Disposte così le cose, quando la soluzione ha raggiunto la temperatura di 80°, si fa passare la corrente. Tosto si ha un'abbondante formazione di idrati diversi che intorbidano la soluzione. Il cromo stesso si separa dapprima allo stato di idrato, ma mano a mano che l'operazione procede e che il cloro che si svolge in eccesso agisce come ossidante, la colorazione verde dell'idrato di Cromo scompare, per dar luogo alla colorazione rossa-bruna dell'idrato ferrico, mentre il liquido va assumendo la colorazione gialla propria del cromato potassico.

Impiegando una intensità di corrente di 0,5 Amp. (non è qui il caso di parlare di densità di corrente, data la forma variabile ed incostante degli elettrodi) con una differenza di potenziale di 8-10 Volt, si può in 4 ore portare in soluzione 1 gr. di metallo. Il tempo necessario però può venire di molto ridotto, aumentando opportunamente l'intensità di corrente; ma per un buon andamento dell'elettrosi, non è conveniente di oltrepassare 1 Amp., quando il metallo sia in trucioli o grani, perchè altrimenti lo sviluppo gassoso è troppo vivace, e allora può succedere facilmente un trascinamento di parte del metallo fuori dell'apparecchino, parte che non può allora subire più l'azione della corrente, e non può quindi passare in soluzione.

Si fa passare la corrente fino a soluzione completa del metallo.

Quando si abbia a che fare con un metallo in trucioli o granelli, si protrae l'azione della corrente, fino a che introducendo la punta di un filo di platino nel tubicino contenente il metallo non si verifichi più la presenza di alcun granello resistente.

Ad ogni modo, dopo decantata la soluzione, ci si può assicurare se lo eventuale residuo nero in polvere finissima contenga ancora del metallo inattaccato, sottoponendolo in un piccolo bicchiere all'elettrolisi, con nuova soluzione di cloruro potassico. Non deve formarsi precipitato in seno al liquido, nè il liquido stesso deve dare più reazione di cromo. Il residuo nero che talvolta si riscontra nel fondo del tubicino, nel caso di metallo in granelli, è costituito da carbone, e si può verificare col fatto che fuso con nitrato di potassio e carbonato sodico, brucia completamente e non dà reazione di cromo.

La soluzione insieme al precipitato, si porta all'ebollizione per assicurare l'ossidazione completa del cromo a cromato, ed inoltre allo scopo di eliminare l'eccesso di cloro libero presente, si lascia quindi raffreddare, si porta a volume noto in recipiente graduato, e si ha così il liquido ed il precipitato, pronti per diverse determinazioni.

Nella condizione in cui ci troviamo di avere cioè il ferro allo stato di idrato insolubile ed il cromo allo stato di cromato in soluzione insieme alla

silice ed all'allumina eventualmente presente, si può ricorrere a diversi metodi di determinazione del cromo. I metodi volumetrici, offrono un grande vantaggio, dal punto di vista della rapidità, sui metodi ponderali, ma sia gli uni che gli altri, per dare dei buoni risultati, esigono certe condizioni, alle quali non è sempre facile soddisfare, in seguito alle operazioni precedentemente effettuate.

Per applicare il metodo per pesata si ricorre più convenientemente alla precipitazione del cromo allo stato di idrato mediante solfuro ammonico, previa riduzione del cromato con acqua ossigenata.

A tale scopo si filtra per filtro secco una parte aliquota del liquido, si aggiungono 3-5 gr. di nitrato ammonico, e si porta fino quasi a secco a b. m. mantenendo la soluzione alcalina, allo scopo di eliminare la silice e l'allumina; si riprende con acqua, e si filtra.

Si acidifica leggermente il filtrato con HCl, e vi si aggiunge, a goccia a goccia, dell'acqua ossigenata; il liquido si colora in bleu più o meno intenso, quindi si decolora e passa al verdastro; quando una nuova aggiunta di acqua ossigenata non produce più alcuna colorazione bleu, tutto il cromo è ridotto a sale di cromo. Si fa allora passare nel liquido una corrente di H_2S per distruggere l'eccesso di acqua ossigenata, poi si aggiunge dell'ammoniaca, e si porta all'ebollizione fino ad eliminare l'eccesso di ammoniaca preferibilmente in recipiente di platino, o almeno di porcellana. Si lava bene il precipitato per decantazione, e quindi sul filtro con acqua calda contenente del nitrato ammonico; è prudente ridisciogliere il precipitato in HCl, e riprecipitare una seconda volta con ammoniaca, senza impiegarne un eccesso. Si filtra. si lava, si calcina il precipitato allo stato umido in crogiuolo di platino tenuto coperto dopo la combustione del filtro, (per evitare delle perdite per proiezioni, quando l'ossido di cromo diventa incandescente) e si pesa.

La determinazione per mezzo di un liquido titolato allorquando il cromo si trova allo stato di cromato, è molto più rapida che un dosaggio ponderale. Essa si fonda sempre su una riduzione operata in liquido acido. I riduttori più comunemente impiegati sono: 1) l'acido ossalico; 2) il sale di Mohr, e 3) l'ioduro potassico. Nel nostro caso speciale in cui ci troviamo in presenza di cloruri, è preferibile quest'ultimo metodo. Esso si fonda sulla reazione seguente. Trattando una soluzione acida per acido cloridrico, di ioduro potassico con un cromato alcalino, l'acido cromico viene ridotto a freddo e quantitativamente in sale di cromo, mettendo in libertà una quantità equivalente di iodio.

$$2\,Kr_2CrO_4 + 6KI + 16HCl = 10KCl + 2CrCl_3 + 8H_2O + 6I.$$

Si titola quindi l'iodio messo in libertà con soluzione di iposolfito sodico $\frac{N}{10}$ in presenza di salda d'amido. La soluzione di iposolfito sodico

può venire titolata o con iodio purissimo e secco (conservato entro essiccatore non ingrassato con cloruro di calcio), oppure con soluzione di bicromato potassico puro e disseccato a 130°, di cui gr. 4,9083 vengono disciolti in un litro.

Una parte aliquota del liquido contenente il cromato viene filtrata per filtro secco: si acidifica debolmente con HCl, e quindi dopo diluizione con acqua si riscalda debolmente a b. m., allo scopo di eliminare le ultime traccie di cloro; si neutralizza possibilmente l'HCl, e quindi si versa la soluzione stessa imbevuta, contenente da 1 a 2 gr. di ioduro potassico purissimo, disciolto nella minor quantità possibile d'acqua ed addizionato di 5 cc. di HCl. (1:5) (È necessario versare la soluzione del cromato sull'ioduro e non inversamente). Tosto il cromato passa al sale di cromo, mentre si mette in libertà l'iodio. Si diluisce fortemente il tutto con acqua, fino a circa 500 cc., ed agitando continuamente si fa gocciolare nel liquido la soluzione $\frac{N}{10}$ di iposolfito. Quando l'intensità della colorazione gialla dell'iodio è molto debole, si aggiungono 2-3 cc. di salda d'amido (1), e quindi ancora l'iposolfito a goccia a goccia, fino a che la colorazione passa dal bleu dell'ioduro d'amido al verde chiaro del sale di cromo.

Il calcolo che si deve fare è semplicissimo; 1 cc. di soluzione di iposolfito $\frac{N}{10}$ corrisponde a gr. 0,012685 di iodio, e siccome ad ogni due atomi di cromo ($52{,}1 \times 2 = 104{,}2$) corrispondono sei atomi di iodio, 1 cc. di iposolfito $\frac{N}{10}$ corrisponderà pure alla sesta parte di 0,01042, cioè a gr. 0,001736 di *cromo*.

In luogo di questo metodo, si può anche e con maggior esattezza precipitare il cromo allo stato di idrato previa riduzione con acqua ossigenata, o con anidride solforosa, nel modo descritto nel metodo per pesata, disciogliere quindi il precipitato in pochissimo acido solforico, e dosare in questo il cromo ossidandolo con permanganato potassico in soluzione alcalina, fino all'apparizione della colorazione giallo d'oro del cromato, secondo il metodo proposto dal Giorgis (2).

Riporto qui i risultati dell'analisi di n. 3 ferri cromati:

Per 100:

Ferro cromato n. 1:

Cromo per pesata	=	76,23
» volumetr. con KI	=	76,63

(1) È necessario impiegare presso a poco la stessa diluizione e la stessa quantità di salda d'amido impiegata nella titolazione della soluzione dell'iposolfito.

(2) G. Giorgis, *Dosamento del cromo nei prodotti siderurgici.* Rend. Acc. Lincei, vol. I, 2° sem. 1892.

Ferro cromato n. 2:

Cromo	per pesata	= 61,38
»	volumetr. con KI	= 61,92
»	metodo Giorgis	= 61,43

Ferro cromato n. 3:

Cromo	per pesata	= 70,62
»	volumetr. con KI	= 71,20
»	metodo Giorgis	= 70,95

Nel precipitato contenente il ferro ed eventualmente il nichel ed il manganese, si possono dosare questi elementi, applicando i metodi soliti di separazione e di determinazione.

Nel caso del nichel, però, invece di trattare il precipitato con ammoniaca, filtrare, lavare e riprecipitare il nichel, mi sembra si possa più rapidamente e forse anche più esattamente, ricorrere al metodo elettrolitico di separazione del ferro dal nichel. Il processo Vortmann è basato sul fatto che l'idrato ferrico in sospensione in un liquido non è punto decomposto dalla corrente elettrica, e d'altra parte la presenza del precipitato non impedisce affatto il deposito elettrolitico di altri metalli, come il nichel, il cobalto ecc.

Impiegando quindi il mio metodo di soluzione di un acciajo al cromo e nichelio, si raccoglie il precipitato di idrati di ferro e di nichel su un filtro, si lava, si discioglie in poco acido solforico diluito, si aggiungono 6-8 gr. di solfato ammonico, poi ammoniaca in leggero eccesso, e si sottopone all'elettrolisi il liquido in capsula di platino, con una densità di corrente da 0,4 a 0,8 Amp; dopo tre ore tutto il nichel è precipitato, e ci si può assicurare prelevando una piccola quantità del liquido chiaro e trattandolo con solfuro ammonico. Durante l'operazione il liquido deve conservarsi sempre ammoniacale, ma nello stesso tempo bisogna evitare un eccesso di ammoniaca. Si lava quindi il precipitato con acqua fredda, poi tre volte con alcool, si dissecca in istufa fra 70°-90° e si pesa.

Per il manganese si può invece disciogliere il precipitato lavato come sopra in acido solforico, neutralizzare il grande eccesso di acido con carbonato sodico, precipitare il ferro con ossido di zinco, e nel liquido filtrato dosare volumetricamente il manganese con permanganato potassico.

Ma piuttosto che su questi elementi, m'interessa in particolar modo di richiamare l'attenzione sullo zolfo e sul fosforo, contenuti nei ferri cromati, e negli acciaj ad alto tenore in cromo, e per la cui determinazione non esistono finora dei metodi sufficientemente pratici ed esatti da applicarsi in questi casi speciali [5].

[5] Un'ossidazione elettrolitica dello zolfo negli acciaj fu proposta recentemente dal dott. Gasparini (Rass. miner., vol. XXII, n. 9, 1905), impiegando come ossidante l'acido

Qualora si impieghi del cloruro potassico purissimo, e si abbia l'avvertenza di portare in soluzione una quantità sufficiente di metallo, per l'azione ossidante del cloro che si svolge sul metallo da analizzare, tutto lo zolfo in esso contenuto viene ossidato ad acido solforico, e tutto il fosforo ad acido fosforico. Di questi due il primo rimane in soluzione insieme al cromato allo stato di solfato potassico, mentre tutto l'acido fosforico si trova nel precipitato allo stato di fosfato basico di ferro. Si può quindi procedere ad una determinazione esatta di questi due elementi, nel seguente modo.

Per lo zolfo si filtra una parte aliquota della soluzione: in essa si separa prima il cromo (1), precipitandolo allo stato di idrato; a tal uopo si acidifica fortemente la soluzione con HCl, si aggiunge dell'alcool e si fa bollire fino ad eliminazione completa di questo: si precipita quindi con ammoniaca pura in leggiero eccesso, si fa bollire per qualche tempo in recipiente di platino o di porcellana, si filtra, si lava il precipitato, e nel liquido filtrato si procede alla precipitazione dell'acido solforico con cloruro di bario, previa acidifiazione con acido cloridrico.

Per il fosforo, si raccoglie il precipitato di idrato ferrico su un filtro e dopo lavaggio si scioglie in acido cloridrico, si porta a secco la soluzione per rendere insolubile la silice, si riprende con acqua ed acido cloridrico, si filtra; il liquido filtrato contiene l'acido fosforico e si potrebbe precipitare direttamente col reattivo molibdico; ma è più prudente di eliminare l'eccesso dei cloruri presenti, ricorrendo ad una precipitazione con ammoniaca; il precipitato di ossido di ferro, insieme al fosfato di questo metallo, si lava fino ad eliminazione del grande eccesso di cloro, e quindi si discioglie sul filtro colla minor quantità possibile di acido nitrico diluito e bollente. Nella soluzione neutralizzata ed acidificata quindi leggermente con acido nitrico si precipita l'acido fosforico col metodo ordinario e colle necessarie precauzioni allo stato di fosfomobidato ammonico (2). Da numerose analisi di confronto compiute coi metodi usuali sopra acciaj ordinari ho potuto accertare che le determinazioni di zolfo e fosforo in tal modo eseguite, danno dei risultati veramente soddisfacenti; per cui non è escluso che il metodo di attacco con cloruro potassico non possa impiegarsi, anche per il dosaggio dello zolfo e del fosforo, in tutti i prodotti siderurgici, in luogo dei metodi comunemente adottati a tale scopo.

---

nitrico; anzi l'autore si riserva di completare lo studio data la difficoltà che egli pure ha incontrato nell'attacco del metallo mediante l'acido nitrico.

(1) La precipitazione dell'acido solforico in un liquido contenente un cromato, o un sale di cromo, riesce sempre affetta da errore, perchè il precipitato di solfato di bario, trascina sempre con sè un po' di cromo, e il precipitato calcinato contiene una certa quantità di ossido di cromo.

(2) Treadwell, Lehrbuch der analytischen Chemie, III ediz., pag. 323.

Concludendo, il metodo esposto permette di procedere in maniera abbastanza facile e comoda all'analisi di leghe ricche in cromo, e ci offre il modo inoltre di eseguire con una sola presa di saggio la determinazione del cromo, dello zolfo, del fosforo, ed eventualmente anche del manganese e del nichel (1).

Bacteriologia agraria. — *Per l'esame bacteriologico-agrario del terreno.* Nota del dott. R. Perotti (2), presentata dal Socio G. Cuboni.

Col progredire delle nostre conoscenze sul significato dell'attività bacterica per la nutrizione delle piante agrarie, si venne a stabilire come le ricerche dalle quali si volle fin qui desumere la fertilità di un terreno, presentassero un lato veramente manchevole. Invero, sebbene non debba cadere alcun dubbio sull'importanza dell'analisi fisica e dell'analisi chimica per la determinazione del valore agrario dei terreni, tuttavia non può disconoscersi che per mezzo di esse non si acquista un'idea giusta dello stato di dinamismo in cui gli elementi nutritivi delle piante vi si trovano e del quale è noto che le piante stesse grandemente si giovano.

Le così dette « prove di vegetazione » le quali erano appunto indirizzate allo scopo di mettere in evidenza sotto questo punto di vista le proprietà di un terreno mediante lo sviluppo di cui su di esso erano capaci le piante, per la limitatezza dello spazio e del tempo in cui debbono eseguirsi non possono essere decisive, nè i risultati, ai quali con esse si addiviene, permettono una completa analisi dei fatti così da mettere in evidenza la causa più o meno immediata delle anormalità verificantesi.

All'esame bacteriologico-agrario del terreno si rivolse quindi l'attenzione degli studiosi nella convinzione che dalla conoscenza dello stato bacteriologico di esso si potesse acquistare un concetto di quello stato di mobilità degli elementi nutritivi della quale i bacteri sono i grandi fattori e che costituisce essenzialmente la fertilità del suolo.

Nei metodi di tale esame, non ostante numerosi e pregevoli studi in proposito, bisogna però riconoscere che non si sono realizzati grandi progressi.

Il vecchio metodo della numerazione dei germi su culture in piastre di gelatina di carne, agar nutritivo, ecc., che sortì le sue origini negl'istituti d'igiene, pur servendo più o meno egregiamente ai fini ai quali essi mirarono, non può davvero ritenersi che sia riuscito di una grande utilità nelle ricerche di bacteriologia quando s'incominciarono ad applicare all'agricoltura.

(1) Esprimo i miei ringraziamenti al prof. G. Giorgis, che mi fu largo di consigli nello svolgimento di questo mio lavoro.

(2) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia Vegetale di Roma.

Caron fu il primo a valersene nelle sue ricerche bacteriologico-agrarie [1]; e dopo di lui Hiltner [2], Koch e Thiele [3], Höflich [4], Gottheil [5], Neide [6], ed altri lo usarono o per la numerazione dei germi o per la determinazione delle specie bacteriche del terreno. Ma i risultati non furono sempre quei desiderati. La stretta dipendenza del numero delle colonie dalla natura del substrato, l'influenza delle diluizioni, la poca sicurezza nella numerazione: i particolari fenomeni dovuti alla secrezione degli enzimi proteolitici in alcune specie, od alla elettività saprofitica di alcune altre; sono tutte circostanze le quali hanno fornito vasto argomento di critica allo stesso metodo applicato all'esame bacteriologico delle acque potabili e che acquistano un valore molto maggiore allorchè lo si vuole estendere all'esame bacteriologico del terreno. È noto a tale riguardo come un'intera categoria di microrganismi, la cui funzionalità è della massima importanza nel suolo, non possono svilupparsi negli ordinari mezzi di cultura; sono: i nitroso- ed i nitro-bacteri del Winogradsky, gli oligonitrofili del Beyerinck. Secondo Hiltner anche il radicicola di alcune leguminose (lupino, serradella) richiede alcune speciali condizioni perchè se ne ottenga lo sviluppo nelle culture in piastre.

Per tutti gli accennati inconvenienti che presenta la numerazione dei germi volle il Remy [7] proporre un nuovo metodo di esame bacteriologico-agrario basato su di un principio molto giusto, la cui applicazione si deve tuttavia far risalire attraverso gli studi dell'Omelianski su gli Azotobacter e del Winogradsky su i nitrificanti fino alle osservazioni del Leeuwenhoek su gl'*infusori* dell'acque putride. Consiste esso nell'esame dell'azioni bacteriche nelle soluzioni nutritive; e, benchè non permetta l'osservazione e la determinazione delle specie, si deve convenire che è molto rispondente al fine propostosi dagli sperimentatori di determinare lo stato di mobilità degli elementi nutritivi nel terreno. Scarsa letteratura possediamo ancora sull'argomento: tuttavia essa ci apprende che il metodo non difetta di mende le quali hanno suggerito i miglioramenti che sono stati già proposti dal Löhnis [8] e dall'Ehrenberg [9].

(1) Landw, Versuchs-Station, v. 45, pag. 400. Jahrbücher der Deut. Land. Ges., v. 15, pag. 43.

(2) *Ueber neuere Ergebnisse auf dem Gebiete der Bodenbakteriologie.* Mitt. d. ökon. Ges. Konigr. Sachsen, *4.* 1901-02, pag. 2.

(3) Protokoll der Sitzung des Sonderausschusses der Deut. Landw. Ges. 10 Feb. 1903.

(4) *Vergleichende Untersuchungen über die Denitrifikationsbakterien.* Cent. f. Bak., II, VIII, 1902, pag. 404.

(5) *Botanische Beschreibung einiger Bodenbakaterien.* Cent. f. Bak. II, VII, pag. 430.

(6) *Botanische Beschreibung einiger sporenbildenden Bakterien.* Cent. f. Bak, II, XII, pp. 1, 161, 337, 539.

(7) *Ein Beitrag zur Methodik der bakteriologischen Bodenuntersuchung.* Cent. f. Bak., II, XII, pp. 262, 448 e II, XIV, pag. 1.

(8) *Bodenbakteriologische Studien.* Cent. f. Bak., II, VIII, pag. 657.

(9) *Die bakterielle Bodenuntersuchung in ihrer Bedeutung für die Feststellung der*

Questi lasciano sperare che al detto metodo sia riserbato un non lontano avvenire: tuttavia per ora dobbiamo limitarci a notare come esso non possa sostituire quello antico della numerazione dei germi per il vantaggio che questo presenta con la determinazione delle forme e la molto maggiore semplicità di procedimento.

Il metodo, per quanto difettoso, della numerazione dei germi costituisce uno di quei mezzi di tecnica bacteriologica, cui, anche nei rapporti con la agraria, non si può assolutamente rinunziare. Perciò io intesi di migliorarlo in modo da poter conferire ad esso il maggior sigrificato agrario possibile; e mi fu guida in ciò un fatto accertato dal Löhnis, per il quale la cultura dei microbi del terreno si ottiene in modo egregio usando substrati preparati con estratto acquoso di Terra (1). Andando più in là, proposi di valermi dell'estratto preparato con la torba, che, essendo un fattore del terreno vegetale, mi lasciava presumere che avrebbe realizzato nei substrati artificiali le condizioni di sviluppo dei microbi terricoli le quali più si avvicinassero a quelle naturali.

La torba, adunque, come prodotto di una più o meno avanzata decomposizione di piante morte in seno all'acqua, la quale ne impedì la completa carbonizzazione, è un materiale ancora notevolmente ricco di composti azotati e carbonati che rappresentano gradi differenti della naturale evoluzione che subisce la sostanza organica vegetale morta. Una buona torba, seccata all'aria, con il 15-20 % di acqua, contiene, dall'1 al 2 % di azoto, dal 0,05 al 0,1 % di acido fosforico e potassa.

Il campione di cui mi servii nel presente studio proveniva dalle bonifiche ferraresi e, seccato all'aria, risultò della seguente composizione: per cento:

Acqua	14.66 14.56
Sostanza organica	80.96 80.77
Azoto totale	1.31 1.35
Ceneri	5.37 5.40

Bodenfruchtbarkeit. Landw, Jahrb., v. Dr. Thiel, v. XXXIII; *Stickstoff verluste in faulenden Peptonlösungen, ein Beitrag zur Methodik der bakteriellen Bodenuntersuchung.* Cent. f. Bak., II, XV, pag. 154.

(1) V. loco citato: Cent. f. Bak., II, XII, pag. 461 e II, XIV, pag. 6.

La soluzione delle ceneri, ottenuta mediante ebullizione moderata per due ore con acido cloridrico di densità 1.10, fornì gli altri dati; per cento:

Anidride fosforica	1.27 1.15
» solforica	4.36 4.63
Ossido di potassio	1.28 1.30
» calcio	8.82 8.50
Sesquiossidi di ferro e di alluminio	11.96 11.47

Alla preparazione dell'estratto procedei nel seguente modo:

Gr. 100 della torba, seccata all'aria, si fecero bollire a fiamma diretta per due ore insieme a cm.^{3} 500 di acqua, ed altri 100 gr. della stessa si lasciarono digerire per due ore in autoclave a 120° C con altri cm^3 500 di acqua. Filtrato il liquido, ch'era di color rosso vinoso scuro, si pressò il residuo, aggiungendo un poco di acqua di lavaggio, e si riunì il nuovo liquido al primo determinando nel risultante l'estratto secco. Questo dette: sostanze minerali ed organiche 6,10 $^0/_{00}$; sostanze minerali 4,25 $^0/_{00}$. In base a questi dati diluii il liquido fino al contenuto dell'1 $^0/_{00}$ di sostanze minerali ed esso risultò di un bel color giallo paglierino, avente reazione leggermente acida e che agitato formava della schiuma. All'analisi risultò contenere piccole quantità di azoto, anidride fosforica, solforica e potassa. Fu sterilizzato nella stufa a vapore acqueo circolante.

Una prima serie di prove con terreni di cultura in piastre a base di estratto di torba preparato nel modo su descritto, fu indirizzata allo scopo di determinare in qnali proporzioni si ottenesse lo sviluppo dei germi del terreno su di esso, comparativamente allo sviluppo di cui i medesimi sono capaci nei substrati di ordinario uso.

Agarizzai una parte dell'estratto lasciandolo con la sua naturale e leggerissima acidità ed un'altra parte l'agarizzai rendendola leggermente alcalina con carbonato sodico. Preparai con questi due substrati, con gelatina di carne, con agar nutritivo e con albumose di Heyden (Hesse e Niedner [1]) culture in piastre secondo il metodo ordinario, inoculandole con uguali e note quantità di liquido ottenuto dalla diluizione di uno stesso campione di terreno vegetale (gr. 1.0). Dopo alcuni giorni, durante i quali le piastre

[1] *Die Metodik der bakteriologischen Wasseruntersuchung.* Zeit f. Hygiene, XXXIX, 1898, pag. 454.

furono mantenute a temperatura ambiente (15-20° C°), procedei alla conta delle colonie sviluppatesi, che risultò la seguente:

N. della cultura	COMPOSIZIONE del substrato nutritivo	N. dei germi per gr.³ del campione di terreno dopo: 5 giorni	10 giorni	20 giorni
1	Estratto di torba naturale	3.300.000	—	3.625.000
2	» » »	3.080.000	—	3.410.000
3	» » »	2.640.000	—	2.835.000
4	» » legg. alcalino	2.200.000	—	3.190.000
5	» » »	1.980.000	—	2.860.000
6	» » »	1.720.000	—	2.970.000
7	Albumose di Heyden . .	2.087.000	3.100.000	3.740.000
8	» » . .	440.000	1.980.000	3.100.000
9	Agar nutritivo	870.000	950.500	non aumentarono
10	» »	660.000	830.000	
11	Gelatina di carne . . .	475	non fu possibile l'ulteriore conta	
12	» » . . .	330		

Da questi primi risultati giova subito dedurre che il numero dei germi del campione di terreno esaminato svelati dalle culture con gelatina di carne ed agar nutritivo fu senza confronto inferiore a quello fornito tanto dalle piastre preparate con estratto di torba quanto da quelle con albumose di Heyden. Eliminando senz'altro dalle ulteriori ricerche i primi terreni che si rivelarono subito impari allo scopo prefissomi, anche per alcune altre ragioni che in appresso esporrò, limitai una seconda prova a meglio stabilire il valore relativo degli ultimi. Soltanto con essi ripetei il procedimento su esposto pervenendo ai seguenti risultati:

N. della cultura	COMPOSIZIONE del substrato nutritivo	N. dei germi per gr.³ del campione di terreno dopo: 5 giorni	10 giorni	20 giorni
1	Estratto di torba naturale	2.220.000	3.350.000	3.520.000
2	» » »	1 860.000	2.800.000	3.300.000
3	» » legg. alcalino	2.540.000	3.395.000	3.960.000
4	» » »	2.420.000	2.750.000	2.860.000
5	Albumose di Heyden . .	2.500.000	3.150.000	3.850.000
6	» » . .	1.900.000	2.930.000	3.080.000

Si scorge da questi come i due substrati a base di estratto di torba non presentino notevoli differenze nel loro comportamento e, benchè substrati certamente più poveri dell'albumose di Heyden, dal punto di vista del numero dei germi, non forniscono alcun argomento per stabilire di fronte ad esso la loro inferiorità. Anzi è utile notare a questo punto che, mentre tutte le colonie le quali si sviluppano sull'agar di torba acquistano uno sviluppo sensibilmente uguale, alcune di quelle sviluppantesi sul'albumose, perchè aventi maggiore elettività saprofitica, tendono ad assu mere uno sviluppo preponderante sulle altre: fatto che, per il significato agrario dell'esame, potrebbe nuocere.

Ulteriori prove indirizzai al miglioramento del substrato all'estratto di torba procurando di favorire da un lato lo sviluppo dei microrganismi oligonitrofili, aggiungendo ad esso alimento carboidrato (glucosio), dall'altro dei polinitrofili aggiungendo al medesimo alimento azotato (albumose). Ottenni due nuovi substrati della seguente composizione:

1. Estratto acquoso di torba	100
« Nährstoffs' Heyden »	1.3
Agar	1.5
2. Estratto acquoso di torba	100
Glucosio	1.0
Agar	1.5

Con essi, con i due terreni al solo estratto di torba e con albumose di Heyden preparai altre culture in piastre secondo il procedimento su esposto e pervenni a questi nuovi risultati:

N. della cultura	COMPOSIZIONE del substrato nutritivo	N. dei germi per gr.^{3} del campione di terreno dopo: 5 giorni	10 giorni	20 giorni
1	Estratto di torba naturale	4.840.000	5.030.000	5.588.000
2	» » »	4 620.000	4.900.000	5.280.000
3	» » legg. alcalino	3.520.000	3.880.000	3.960.000
4	» » »	4.730.000	4.840.000	5.060.000
5	» » con glucosio	8.360.000	9.240.000	9.900.000
6	» » »	7.920.000	8.880.000	9.420.000
7	» e nährstoffs' Hey.	6.160.000	6.600.000	6.820.000
8	» » »	6.380.000	7.040.000	7.470.000
9	Albumose di Heyden . .	4.500.000	5.110.000	5.200.000
10	» » . .	3.970.000	4.250.000	4.450.000

Un evidente vantaggio numerico si ottenne in questa prova dall'impiego dell'estratto di torba migliorato con « nährstoff s' Heyden » e più ancora da quello migliorato con glucosio. Dal primo si ottennero alcune specie le quali assunsero uno sviluppo predominante: nell'altro lo sviluppo delle colonie fu presso a poco uguale per tutte le forme fra le quali vi era una larga rappresentanza di ifomiceti ai quali nei rapporti dell'esame batteriologico-agrario del terreno deve attribuirsi non poca importanza.

A conferire un maggiore significato all'ufficio dell'estratto nei substrati di cui sopra instituii un'ulteriore prova comparativa fra il terreno all'estratto di torba addizinato di glucosio ed un uguale terreno in cui all'estratto era sostituita l'acqua di condottura. I risultati ottenuti furono:

N. della cultura	COMPOSIZIONE del substrato nutritivo	N. dei germi per gr.3 del campione di terreno dopo 20 giorni	
1	Acqua di condottura e glucosio 1%	600	quasi esclusivamente ifomiceti
2	» »	790	
3	Estratto di torba »	2.640.000	
4	» »	2.420.000	

Infine, volli anche esaminare il comportamento delle specie anaerobie sopra i terreni ad estratto di torba ed allestii alcune culture in piastre che mantenni sotto campana in atmosfera d'idrogeno. I risultati ottenuti sono riportati nel seguente quadro:

N. della cultura	COMPOSIZIONE del substrato nutritivo	N. dei germi per gr.3 del campione di terreno dopo 20 giorni
1	Estratto di torba naturale . . .	1.755.000
2	» » » . . .	1.510.000
3	» » legg. alcalino . .	48.750
4	» » » . .	57.500
5	» » e 'nährstoffs' Hey.	2.047.500
6	» » »	1.657.000
7	» » e glucosio . . .	1.365.000
8	» » » . . .	1.565.500

Da essi rilevasi un uguale comportamento dei vari substrati all'estratto di torba di fronte allo sviluppo degli anaerobi, qualora si eccettui il sub-

strato alcalino. I migliori risultati che si ottennero nelle culture aerobie con l'estratto di torba al glucosio mi sembra che debbono ascriversi allo sviluppo dei microrganismi nitrofili i quali nelle condizioni dell'ultimo esperimento non potevano svilupparsi.

Riassumendo, da tutti i sopra rilevati fatti si può trarre la seguente conclusione:

Il numero dei germi che nell'esame bacteriologico del terreno si ottiene dalle culture in piastre con substrati nutritivi preparati con estratto di torba all'1 °/₀₀ di sostanze minerali ed aggiunta dell'1 °/₀ di glucosio è ordinariamente molto superiore a quello dato dai substrati di gelatina di carne e di agar nutritivo (¹). Per il loro comportamento si avvicinano di più a quel substrato l'albumose di Heyden e l'estratto di torba addizionato di « nährstoffs' Heyden » non presentandosi tuttavia in questi ultimi uno sviluppo molto uniforme delle colonie. Nel medesimo substrato una larga rappresentanza dei microrganismi rivelati spetta agl'ifomiceti.

L'utilità dell'impiego dei substrati culturali « magri » per l'esame bacteriologico del terreno, fu già rilevata dal Faelli (²) e dal Frassi (³) che usarono nelle loro richerche con notevole vantaggio l'albumose di Heyden. Essa risulta molto evidente dai miei studi, con i quali si viene per di più a conferire un significato agrario all'impiego del nuovo substrato a base di estratto di torba per una lunga serie di considerazioni.

Anzitutto l'impiego di un terreno magro, consentendo lo sviluppo dei germi abituati ad un substrato molto povero di sostanze albuminoidi ed azotate in genere, permette di rivelare in numero preponderante i microrganismi nitrofili. In secondo luogo lo sviluppo d'ifomiceti che si ottiene egregiamente nel substrato di torba permette di apprezzare in modo adeguato un altro fattore della fertilità del terreno sul quale fino ad ora non fu bene attirata l'attenzione. Deve ritenersi che le muffe, abbondantissime nel suolo mediante la loro secrezione acida, abbiano una non piccola parte nei fenomeni di solubilizzazione che avvengono nel terreno agrario. Pur escludendo che l'intensità degli effetti, di cui esse sono capaci, eguagli o solo si avvicini a quella dei bacteri, non può disconoscersi che l'inferiorità dalle medesime posseduta sotto tale rapporto deve essere convenientemente compensata dalla incomparabilmente maggiore estensione del loro corpo vegetativo.

(¹) È giusto riconoscere che per alcuni terreni i risultati numerici dell'esame bacteriologico eseguito con substrati ricchi di sostanze organiche, ed in particolare azotate, possano essere superiori a quelli ottenuti con substrati magri; tuttavia non si può fare a meno di notare come ciò possa verificarsi soltanto in condizioni molto speciali e limitate, le quali non sono certo quelle che si presentano ordinariamente nel terreno agrario.

(²) *Ricerche di Batteriologia Agraria fatte nell'Agro Romano.* Arch. Farm. sperim., III, fasc. I.

(³) *Osservazioni circa la flora batterica del sottosuolo.* Riv. d'Igiene e San. Pubb. XVII, 1906.

Infine, alcuni fatti di cui siamo attualmente in possesso autorizzano a rivolgersi sempre con fiducia all'uso della torba. Come io stesso dimostrai, la torba favorisce grandemente il processo di ammonizzazione della calciocianamide nel quale, insieme ad azioni fisiche e chimiche ha gran parte l'attività bacterica (1). (V. anche gli studi del Löhnis (2)). Müntz e Lainé, inoltre, riuscirono a segnalare un altro fatto non meno importante per il quale la torba sarebbe capace di favorire la produzione intensiva dei nitrati, riuscendo essa un mezzo assai propizio al funzionamento dei nitrificanti (3). Tutto ciò, adunque, induce a ritenere con buon fondamento che i microbi, cui spetta una funzione agricola, trovino molto opportune condizioni di sviluppo nella torba, prodotto delle molteplici e complesse azioni degli agenti naturali esercitantesi lentamente e gradualmente su la sostanza vegetale morta.

Tuttavia non dissimulo a me stesso che il metodo della numerazione dei germi, sia pure migliorato come ho sopra proposto, presenta grandi lacune, come in sè, così anche nelle sue applicazioni agli studi di agraria. Infatti, se in esso si realizzano le condizioni migliori per lo sviluppo degli oligonitrofili non si ottengono qnelle più favorevoli ai polinitrofili.

Permane molto grave la questione se in un substrato di quella natura contenente sostanza organica, possano svilupparsi i nitrosanti. Peraltro, in mancanza di mezzi di tecnica migliori, è mio avviso, che in molti casi non si possa rinunziare al metodo di esame bacteriologico in questione specialmente poi quando si consideri che, per il miglioramento proposto, favorendosi in esso lo sviluppo degli oligonitrofili, si ha modo di porre in evidenza il primo termine del ciclo dell'azoto in natura, che è di base al funzionamento delle principali forme bacteriche viventi nel terreno alle quali spetta l'elaborazione dei materiali assimilabili dalle piante superiori.

Fisiologia vegetale. — *Esperienze di selezione ed ibridazione sul frumento e sul granturco.* Nota preventiva del dott. N. Strampelli, presentata dal Socio G. Cuboni.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) *Sopra l'uso della torba per la trasformazione della calciocianamide in composti ammoniacali.* Rend. Acc. Lincei, 1905, XIV, pag. 174.

(2) *Se la scomposizione della calciocianamide possa avvenire per mezzo dei bacteri.* Arch. Farm. sperim., V, 1906.

(3) *Ueber die Zersetzung des « Kalkstickstoff ».* Cent. f. Bak., II, XIV, nn. 3-4, 12-13.

(4) *L'utilisation des tourbières pour la production intensive des nitrates.* Compt. Rendu, 112, pag. 1239.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte del Socio prof. G. B. Favero, mancato ai vivi il 29 dicembre 1906; apparteneva il defunto all'Accademia, per la Meccanica, sino dal 1° agosto 1887 come Corrispondente, e dal 9 agosto 1899 come Socio nazionale.

Lo stesso Presidente dà anche annuncio della morte del benemerito comm. Enrico Santoro, avvenuta in Costantinopoli il 23 dicembre scorso. Ricorda la liberalità del defunto, che volle istituire un premio biennale di L. 10 mila da assegnarsi dall'Accademia; e accenna alla deferenza colla quale il Santoro accolse tutte le proposte fattegli dall'Accademia, per rendere i concorsi da lui istituiti praticamente profittevoli agli studiosi e al progresso della scienza applicata.

Il Socio Cerruti legge la seguente Commemorazione del Corrispondente prof. E. Cesàro.

Onorevoli colleghi,

Nel pomeriggio del dì 12 del passato mese di settembre periva miseramente a Torre Annunziata il nostro Socio Corrispondente Ernesto Cesàro, vittima di uno slancio di amore paterno per togliere uno dei figliuoli alle onde furiose del mare in tempesta. Vano riusciva lo sforzo, e padre e figlio discesero insieme nel sepolcro.

Il tragico evento suscitò negli animi gentili di ogni parte d'Italia larga commiserazione, sebbene pochi forse abbiano potuto misurare in tutta la sua grandezza la grave sciagura toccata alla scienza in quel giorno disgraziato. Essa fu tale, che ben a ragione il nostro egregio Presidente mostrò il desiderio che se ne tenesse qui particolare discorso. Ed io, che ebbi la fortuna di noverare il Cesàro tra i miei discepoli, e di essergli legato, da oltre venti anni, d'amicizia affettuosa, non esitai ad assumere il pietoso ufficio di portare alla sua memoria un ultimo tributo di gratitudine e di ammirazione.

* * *

I casi della vita del Cesàro si potrebbero restringere in poche parole, ma sono talmente intrecciati colle vicende de' suoi studi e della sua opera scientifica, che non giova il farne parola separata. Nacque in Napoli il dì 12 marzo del 1859 da Luigi, comodo possidente di Torre Annunziata e dalla seconda moglie Fortunata Nunziante. Ebbe la prima educazione nel Convitto nazionale Vittorio Emanuele della città nativa, dove seguì i corsi secondarî

fino alla quarta classe del ginnasio: indi, e ciò fu nel 1874, passò a Liegi per continuare la sua istruzione nella Scuola delle miniere. Ivi era stato preceduto, al medesimo scopo, dal fratello maggiore Giuseppe, il quale, fissatosi poi nel Belgio, vi conquistò bella riputazione nella scienza ed al presente vi onora il nome italiano come dotto e stimato professore di mineralogia nell'Università di Liegi. Aiutato dal fratello ottenne la iscrizione alle classi preparatorie per la Scuola delle miniere dopo un brillante esame di prova riuscendo primo tra i compagni.

***

Senonchè, fin dai primi anni della sua dimora a Liegi, rovesci di fortuna ingoiarono la sostanza famigliare e le sue condizioni economiche diventarono subitamente difficili. Il disagio crebbe alla morte del padre avvenuta nel 1879, ed al disagio andò compagna anche la interruzione degli studi, seguitati irregolarmente e non compiuti, che nell'anno scolastico 1882-83. Nel frattempo egli vagò tra Liegi e Torre Annunziata, fermandosi tra l'altro un anno a Parigi, dove conquistò la stima e la benevolenza di Hermite. Trascinato da forza prepotente verso le matematiche pure perdette ogni passione per la carriera d'ingegnere e non si presentò agli esami per il diploma finale.

Nel 1883 si ridusse a Roma: chiese, e gli fu concesso, di iscriversi all'ultimo anno di corso quale aspirante alla laurea in matematiche. Giunse qua nudo di beni di fortuna, con moglie ed una bambina di pochi mesi, provveduto, come unico mezzo di sussistenza, di un assegno decretatogli dal Municipio di Torre Annunziata per aiutarlo negli studi, ma con fama assicurata di un ingegno portentoso per le matematiche e di una potenza di lavoro veramente singolare. Il Cesàro si presentò a noi con lettere di calda raccomandazione di un suo maestro, il prof. Eugenio Catalan, che era allora giustamente considerato come il migliore ed il più attivo fra i cultori della matematica nel Belgio. Il giudizio lusinghiero, che il Catalan formava sul valore del Cesàro, era ampiamente confermato dalla produzione scientifica già notevole del giovane geometra, il quale aveva saputo attirare sopra di sè l'attenzione di matematici eminenti, ed in specie dell'Hermite, con numerosi lavori su quistioni spinose di aritmetica e particolarmente di aritmetica asintotica, sulle probabilità geometriche, sulla serie armonica, sulla formula di Stirling, sui poliedri, sui numeri bernoulliani; lavori inseriti negli ultimi volumi della « Nouvelle Correspondence mathématique », pubblicata dal Catalan; ne' primi volumi della nuova Rivista « Mathésis » edita a cura dei professori Neuberg e Mansion; e nelle « Nouvelles Annales de Mathématiques » di Parigi. Ma sovra tutti eccelleva una grossa Memoria di 350 pagine dal titolo modesto: *Sur diverses questions d'arithmétique*, stampata tra quelle della Società delle Scienze di Liegi con rapporto favorevole del Catalan. Nella quale Memoria,

oltre a vari risultati sommamente ingegnosi appartenenti in proprio all'autore, è la prima dimostrazione sistematica, subordinata ad un unico concetto, di una quantità sterminata di proposizioni relative alla teoria dei numeri semplicemente enunciate da Liouville ne' primi tomi della seconda serie del suo giornale, e di altri teoremi di aritmetica asintotica scoverti dal sig. Berger, e che dal Catalan erano stati riprodotti nella « Nouvelle Correspondance Mathématique » colla qualificazione di teoremi straordinarî.

***

A Roma il Cesàro frequentò con diligenza esemplare i corsi delle Matematiche superiori, e dalle cose apprese a lezione andava traendo materia a nuove ricerche sue personali: fra esse piacemi segnalare alcune su' gruppi di sostituzioni, ed altre sugli zeri delle funzioni olomorfe, nelle quali ultime con rara eleganza si trovano felicemente ampliate alcune proprietà studiate dal Laguerre.

Sebbene dotato di ingegno vivacissimo e versato in ogni ramo delle matematiche, sebbene non gli facesse davvero difetto la maestria dell'espositore, come n'aveva dato prove non dubbie nelle conferenze, che io solevo tenere co' miei allievi, pure mi confessò più volte, che il pensiero degli esami lo tormentava e non sapeva risolversi a subirne il cimento. Difatti si presentò al solo esame di Analisi superiore con esito, non è a dire, splendidissimo.

Terminato l'anno scolastico si ritirò a Torre Annunziata per prepararsi in quiete agli esami speciali, che ancora gli rimanevano a dare, e per allestire la dissertazione di laurea. Soggetto della dissertazione era il calcolo isobarico: l'autore prendeva le mosse da' risultati già noti per gli studi sulle funzioni simmetriche delle radici delle equazioni algebriche, ma colla sua mente elastica allargando la forma e il contenuto del calcolo faceva rientrare nel suo dominio la teoria dei numeri di Eulero e di Bernoulli, la serie di Lagrange, il calcolo alle differenze finite e delle equazioni alle differenze miste. Sebbene la dissertazione non sia mai stata pubblicata per intero e fors'anco non mai terminata, larghi saggi di essa comparvero nel Giornale matematico di Napoli e nelle « Nouvelles Annales de Mathématiques ».

Ma la compilazione della tesi di laurea non lo assorbiva completamente: attesochè vanno riferiti a quel tempo altri svariati lavori sull'aritmetica asintotica, sulle serie e sulla Geometria cinematica. I quali studi di Geometria cinematica meritano particolare considerazione, perchè contengono il primo accenno all'impiego de' metodi, che il Cesàro costituì poi in un corpo di dottrina col titolo di *Geometria intrinseca.*

Naturalmente tutta questa esuberanza di produzione, caratteristica di mente irrequieta, lo distolse per sempre dall'adempiere alle formalità per il conseguimento della laurea e del titolo dottorale.

***

Nel 1886, quantunque sfornito di gradi accademici, seguendo il consiglio degli amici, si presentò a concorsi banditi per cattedre di Matematica vacanti ne' Licei e nelle Università, confidando che il merito de' suoi lavori avrebbe incontrato equa estimazione presso le persone chiamate a giudicarlo. E non s'ingannò, perchè riuscì vittorioso in entrambe le gare. Con decreto reale del 1° ottobre 1886 fu nominato professore titolare di Matematica nel r. Liceo Mamiani di Roma, e con altro decreto reale del 29 novembre successivo elevato, a decorrere dal 1° dello stesso mese, al grado di professore ordinario di Algebra nell'Università di Palermo. In seguito a questi successi, uniformandosi alla proposta della Facoltà di Scienze e con autorizzazione del Ministero, il Rettore dell'Università di Roma conferiva per titoli al Cesàro il diploma di laurea in matematiche pure.

***

Una volta entrato nell'arringo universitario cominciò pel Cesàro una vita nuova. Egli aveva trovato la sua via: era nato professore e nell'esercizio del magistero fu veramente insuperabile e per zelo e per intelligenza, con poca soddisfazione forse degli svogliati, ma con sommo gaudio ed insigne profitto degli operosi. A Palermo, oltre l'Algebra, insegnò per cinque anni, colla qualità di incaricato, anche la Fisica matematica. Nel 1891 passò professore ordinario di Calcolo infinitesimale a Napoli dove successivamente fu anche incaricato prima dell'Analisi superiore e poi delle Matematiche superiori. Con decreto reale del 18 agosto 1906, per secondare un suo desiderio, fu destinato professore ordinario di Meccanica razionale a Bologna. Ma la inopinata sua fine impedì che il provvedimento avesse materialmente effetto.

Nell'insegnamento dell'Algebra uscì subito dal cammino che era diventato tradizionale nelle nostre Università. Nel tracciare il nuovo indirizzo si inspirò alla celebre *Introductio in Analysin infinitorum* di Eulero ed al *Cours d'Analyse algébrique* di Cauchy, per quanto lo comportavano le condizioni attuali della scienza. Anche nell'insegnamento del Calcolo infinitesimale seppe portare dell'originalità, se non nell'indirizzo, certamente nella ricchezza e nella scelta sapiente delle applicazioni. I due corsi di Analisi algebrica e di Calcolo infinitesimale videro la luce per le stampe: anzi il secondo ebbe due edizioni. Entrambi poi vennero fusi insieme in una traduzione tedesca. L'eleganza della forma, la semplicità de' mezzi impiegati anche negli argomenti più ardui e spinosi, la grande varietà delle applicazioni li rendono di studio dilettevole e suggestivo. Questi pregi li faranno sempre consultare con profitto da' giovani, i quali amano procurarsi una coltura da un lato soda ed estesa, dall'altro lontana da una critica esagerata ed intempestiva, che spenga l'attitudine alla ricerca originale.

Come insegnante di Fisica matematica e di Matematiche superiori, il Cesàro tenne dei corsi sulla teoria matematica dell'elasticità, sulla teoria matematica del calore, sull'idrodinamica, sulla geometria intrinseca, sulla geometria non euclidea e sull'aritmetica asintotica. Egli si proponeva di venirli mano mano pubblicando, ma non ebbe tempo di farlo che per due, vale a dire per la Teoria matematica dell'elasticità e per la Geometria intrinseca. Nell'opuscolo sulla Teoria matematica dell'elasticità non è propriamente novità di risultati, ma vi brillano le doti di concisa perspicuità, che distinguono tutti i lavori del Cesàro, e vi sono condensati in breve spazio i risultati più importanti conseguiti da scienziati italiani, fino al tempo in cui l'opuscolo venne alla luce, in una via aperta da due celebri Memorie del Betti e del Beltrami.

Il libro sulla Geometria intrinseca, che ebbe anche una traduzione tedesca, con miglioramenti ed aggiunte all'originale italiano, rappresenta la sintesi di ricerche diuturne ed originali dell'autore, dirette a rifondere in una trattazione metodica ed uniforme gli svariatissimi problemi, i quali cadono nel dominio della Geometria differenziale intesa in senso lato.

Ignoro se tra i manoscritti, che egli ha lasciato, sia il materiale per gli altri corsi. Sarebbe deplorevole che non vi si trovassero per esempio le lezioni sull'aritmetica asintotica; su questo soggetto il Cesàro si poteva ben dire un creatore, e so, da lettere scrittemi in diverse occasioni, delle fatiche che egli andava durando per dare alle lezioni stesse forma definitiva per la stampa.

***

Ma le occupazioni richieste od occasionate dagli obblighi dell'insegnamento non rappresentavano che una parte secondaria nell'attività intellettuale del Cesàro. Dalla nomina a professore sino al giorno della morte mise fuori parecchie centinaia di Memorie sopra quasi tutti i rami delle matematiche, che riesce pressochè impossibile a classificare con sicurezza.

Procedendo all'ingrosso se ne possono formare quattro gruppi. Un primo gruppo abbraccia i lavori di aritmetica asintotica, a' quali si collegano le ricerche sul calcolo della probabilità e sue applicazioni a quistioni disparatissime di aritmetica, di geometria e di analisi. Un secondo gruppo comprende le Memorie che hanno per obbiettivo le operazioni infinite, o in qualche modo vi si connettono, come le indagini sui limiti, sulle serie, sui prodotti infiniti, sui numeri bernoulliani ed euleriani. In un terzo gruppo vanno collocate le Memorie sulla Geometria intrinseca e nel quarto finalmente quelle sulla Fisica-matematica e sulla Meccanica.

***

Sarebbe impresa lunga ed in questo momento superflua l'entrare in un'analisi anche sommaria di tanta e così eterogenea produzione scientifica: nol

consentono nè il tempo, nè il luogo. Del resto quale sia il giudizio che ne hanno recato gli studiosi, gli intelligenti comprenderanno quando sappiano che nel 1888 la Società italiana delle Scienze gli assegnava la medaglia d'oro su rapporto favorevole di una Commissione composta di Betti, Brioschi e Beltrami; che era aggregato oltrechè alla nostra Accademia, all'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli, all'Accademia Pontaniana della stessa città, alla Società italiana delle Scienze (detta dei XL), alla Società delle Scienze naturali ed economiche di Palermo, alle Accademie delle Scienze di Torino, di Bruxelles, di Lisbona e alla Società delle Scienze di Liegi.

Guardando alla straordinaria fecondità scientifica del Cesàro, alla somma versatilità del suo ingegno, alla fertilità di espedienti che gli permetteva di trarre dalla più modesta esercitazione conseguenze inaspettate, alla abilità nella composizione di trattati didattici di lunga lena, la mente ricorre subito ad Eulero, nè parrà alle persone discrete sproporzionato o indegno il paragone: a lui nocque soltanto la brevità della vita, che la robusta costituzione prometteva lunga, e che un lagrimevole incidente troncò nella sua piena maturità.

***

Ed ora due parole sull'uomo. Era il Cesàro nelle cose della vita comune di una ingenuità e di una buona fede veramente straordinarie: su questo capitolo si potrebbero raccontare di lui aneddoti appena credibili, che gli procurarono amarezze infinite. Tre passioni lo dominavano: la scienza, l'insegnamento e la famiglia. Per procurare alla famiglia un'esistenza meno travagliata, tentò a varie riprese di trovare un collocamento nel Belgio, negli Stati Uniti e nell'Australia, dove gli si erano fatte balenare speranze di un trattamento meno modesto di quello che è fatto agli scienziati italiani nel loro paese. Il passaggio dall'Università di Napoli a quella di Bologna egli lo cercò convinto che a Bologna più che a Napoli avrebbe avuto comodità per dare a' figli un'educazione seria. Privo di censo e ricco di prole, più vicino alla povertà che lontano dall'agiatezza, viveva contento degli emolumenti che gli derivavano dagli uffici universitari ed accademici. Non brigò cariche o mansioni remunerate, nè posizioni pubbliche che lo mettessero in mostra, o in qualche modo gli sottraessero tempo e forze a' doveri d'insegnante ed agli ideali di scienziato.

D'indole ritrosa e quasi selvatica, rari erano coloro che fossero in grado di apprezzarne tutta la nobiltà del carattere, salvo gli intimi, a' quali apriva interamente il suo cuore e fra questi bisogna certamente collocare i migliori fra gli allievi e gli antichi suoi maestri. Io che ebbi con lui per lunghi anni dimestichezza e continuo carteggio, non senza profonda commozione sono

andato rileggendo ne' giorni passati le lettere riboccanti di entusiasmo nelle quali mi veniva esponendo la tela de' lavori in corso di esecuzione e di quelli orditi per l'avvenire. Ed ora non so rassegnarmi al pensiero che di tanta vita non resti più che un mesto ricordo!

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Blaserna presenta una raccolta di pubblicazioni di cui ha fatto omaggio il Socio straniero, di recente nomina, prof. Eriksson.

Lo stesso Presidente richiama inoltre l'attenzione dei colleghi su di un libro inviato in dono dal prof. Duhem e avente per titolo: *Etudes sur Léonard de Vinci — Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu*, e dà comunicazione di una lettera colla quale l'autore ha accompagnato il dono del suo lavoro.

Presenta poi un volume pubblicato in ricordo del 70° anno di vita del Socio straniero prof. Lieben; e aggiunge che alle onoranze tributate in questa occasione all'illustre chimico, prese parte anche l'Accademia rappresentata dal Socio straniero Suess.

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni pervenute in dono all'Accademia, segnalando un opuscolo del Corrispondente Berlese, una *Commemorazione del prof. E. Cesàro* del prof. Amodeo, e la pubblicazione *Museo Mineralogico Borromeo* fatta in occasione del 50° anniversario della fondazione della Società italiana di scienze naturali di Milano.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Millosevich comunica gli elenchi dei lavori presentati ai concorsi ai premi Reali e Ministeriali, Santoro e Carpi, scaduti col 31 dicembre 1906.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Fisica*.

(Premio L. 10000. — Scadenza 31 dicembre 1906).

1. Arnò Riccardo. 1) « Rivelatore di onde hertziane a campo Ferraris ». Note I, II. (st.). — 2) « Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate e di onde hertziane ». Note I-VII. (st.). — 3) « Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris sotto l'azione di correnti interrotte ed alternate di minima intensità, ed in particolare di correnti telefoniche » (st.). — 4) « Galvanometro telefonico » (st). — 5) « Apparecchio a campo magnetico rotante, per la misura delle correnti di alta frequenza

e delle correnti indotte (correnti faradiche) usate per scopo medicale » (ms). — 6) « Sopra una nuova disposizione del rivelatore di onde hertziane a campo Ferraris » (ms.).

2. Battelli Angelo. 1) « Densità dell'etere, del solfuro di carbonio e dell'alcool liquidi, sotto la pressione dei propri vapori saturi » (st.). — 2) « Sulle scariche oscillatorie » (st.). — 3) « La scarica oscillatoria nei fili di ferro » (st.). — 4) « La scarica oscillatoria nei solenoidi con anima di ferro » (st.). — 5) « Ricerche sperimentali sulle scariche in solenoidi con anima di ferro » (st.). — 6) « L'isteresi magnetica nel ferro per correnti di alta frequenza » (st.). — 7) « Sulle scariche oscillatorie (parte III) » (st.). — 8) « Ricerche teoriche e sperimentali sulla resistenza elettrica dei solenoidi per correnti di alta frequenza » (st.). — 9) « La scarica elettrica nel campo magnetico » (ms.). — 10) « Se le emanazioni radioattive siano elettrizzate » (st.). — 11) « Studi di radioattività » (st.). — 12) « Sulla natura della pressione osmotica » (st.). — 13) « Relazione fra la pressione osmotica e la tensione superficiale » (st.). — 14) « Sul calore specifico dei liquidi che solidificano a temperatura molto bassa » (st.).

3. Canovetti Cosimo. « Ricerche sulla resistenza dell'aria » (ms).

4. Majorana Quirino. 1) « Su due fenomeni magneto-ottici osservati normalmente alle linee di forza » (st.). — 2) « Sul metodo e sulle sostanze da adoperarsi per osservare la birifrangenza magnetica » (st.). — 3) « Sulla birifrangenza magnetica e su altri fenomeni che l'accompagnano » (st.). — 4) « Sulle rotazioni bimagnetiche del piano di polarizzazione della luce » (st.). — 5) « Sulla rapidità con cui si manifesta la birifrangenza magnetica » (st.). — 6) « Sul fenomeno Majorana » (st.).

5. Palladino Pietro. 1) « Sulla unità delle forze e della materia » (ms.). — 2) « Nuova dimostrazione del principio d'Archimede » (ms.).

6. Somma Raffaele. « Il cannocchiale geometrico in relazione all'ottica fisiologica » (ms.).

7. Anonimo (col motto « Dio è il nostro Padre ecc. »). « Cosa è l'Elettricità » (ms).

Elenco dei lavori presentati per concorrere ai premi del Ministero della P. I. per le *Scienze naturali*.

(Due premi del valore complessivo di L. 2600. — Scadenza 31 dicembre 1906).

1. Ariola Vincenzo. 1) « Rigenerazione naturale eteromorfica dell'oftalmopodite in *Palinurus Vulgaris* » (st.). — 2) « La merogonia e l'ufficio del centrosoma nella fecondazione merogonica » (st.). — 3) « La merogonia e l'ufficio del nucleo nella fecondazione » (st.). — 4) « Simbiosi e parassitismo nel regno animale » (st.). — 5) « Due pesci abissali del Mediterraneo » (st.).

— 6) « Pesci nuovi e rari per il golfo di Genova » (st.). — (7 « Appunti sulla Fillossera della vite in Liguria » (st.). — 8) « Sono le tenie metageniche? » (st.). — 9) « I Cestodi e la metagenesi » (st). — 10) « Due nuovi Trematodi parassiti dell'uomo » (st.). — 11) « Pressione osmotica e potere fecondante nei nemaspermi » (st.). — 12) « Polielmintiasi umana da Plerocercoide » (st.). — 13) « Monostoma filicolle e Distoma okeni » (st.). — 14) « Ricerche sulla digestione nelle Aplisie » (st.).

2. Bellini Raffaele. 1) « L'elveziano nelle colline di Chivasso presso Torino » (st.). — 2) « Alcuni nuovi fossili Sinemuriani dell'Appennino centrale » (st.). — 3) « The freshwater Shells of Naples and the neighbourhood » (st.). — 4) « La faune des mollusques fossiles néogènes du périmètre du golfe de Naples » (st.). — 5) « L'influenza dei mezzi come causa di variazioni e di dispersione nei molluschi » (st.). — 6) « Le varie facies del miocene medio nelle colline di Torino » (st.). — 7) « Les ptéropodes des terrains tertiaires et quaternaires d'Italie » (st.). — 8) « Osservazioni paletnologiche sull'isola di Capri » (st.).

3. Cacciamali G. B. 1) « Fascio stratigrafico Botticino-Serle » (st.). — 2) « Studio geologico della regione Botticino-Serle-Gavardo » (st.). — 3) « Sorgenti dei dintorni di Brescia » (st.). — 4) « A proposito del calcare Majolica » (st.). — 5) « Rapporti tra il Lias ed il Giura in provincia di Brescia » (st.). — 6) « Rilievo geologico tra Monticello, Ome, Sajano e Gussago » (st.). — 7) « La punta d'Oro presso Iseo » (st.). — 8) « Rilievi geotectonici tra lago d'Iseo e Val Trompia » (st.).

4. Chelussi Italo. 1) « Note di geologia marchigiana » (st.). — 2) « La Barra di Visso » (ms.). — 3) « Nuove note di geologia marchigiana » (ms.). — 4) « Studio petrografico di alcuni ciottoli cristallini erratici nelle Marche » (ms.).

5. Curreri Giuseppe. 1) « Sulle cause normali delle differenze tra fratelli, indipendentemente dal sesso di essi » (st.). — 2) « Metodi nuovi e semplici per fissare e ritrovare dei punti interessanti di preparati microscopici » (st.). — 3) « Metodi vecchi e nuovi per determinare e ritrovare la posizione di uno o più punti interessanti di preparati microscopici » (st.).

6. Fantappiè Liberto. « Studio cristallografico del Peridoto di Montefiascone » (st.).

7. Ferro Angelo Antonio. 1) « L'origine delle terre gialle veronesi » (st.). — 2) « L'acqua nell'heulandite di Montecchio Maggiore » (st.). — 3) « Contributo alla conoscenza dei fenomeni di metamorfismo di contatto nell'alta valle Zebrù » (st.).

8. Griffini Achille. 1) « Gli uccelli insettivori non sono utili all'agricoltura » (st.). — 2) « Sui Lucanidi e sulla grande variabilità dei loro maschi » (st.). — 3) « Studî sui Lucanidi. 1°. Considerazioni generali sulla grande variazione di caratteri nei maschi dei Lucanidi » (st.). — 4) « Lu-

canidi raccolti da L. Fea nell'Africa occidentale » (st.). — 5) « Studî sui Lucanidi. 2°. Sull'Odontolabis Lowei Parr. » (st.). — 6) « Ortotteri raccolti da L. Fea nell'Africa occidentale » (st.). — 7) « Studî sui Lucanidi. 3°. Sull'Hexarthrius Buqueti Hope » (st.).

9. Martel Edoardo. 1) « Contribuzione all'anatomia del fiore delle Ombrellifere » (st.). — 2) « Contribuzione all'anatomia del fiore dell'Hedera helix, dell'Aralia Sieboldii e del Cornus sanguinea » (ms.).

10. Platania Gaetano. 1) « Aci Castello; ricerche geologiche e vulcanologiche » (st.). — 2) « Sulla velocità dei microsismi vulcanici » (st.). — 3) « Origine della *Timpa* della Scala; contributo allo studio dei burroni vulcanici » (st.). — 4) « Su un moto differenziale della spiaggia orientale dell'Etna » (st.). — 5) « Sur les anomalies de la gravité et les bradysismes dans la région orientale de l'Etna » (st.). — 6) « Effets magnétiques de la foudre sur les roches volcaniques » (st.). (in collab. con Giov. Platania). — 7) « Sul magnetismo prodotto da fulminazioni » (st.) (id.). — 8) « Sull'acclimazione del the in Sicilia » (ms.). — 9) « Sopra il magnetismo delle lave e dei mattoni, prodotto da fulminazioni » (ms.). — 10) « Sull'ordinamento degli studi geologici in Italia » (ms.).

11. Squinabol Senofonte. 1) « Radiolarie Cretacee degli Euganei » (st.). — 2) « Pseudofossili dei Gneiss e dei Micascisti » (st.). — 3) « Due Grotte del Veneto » (st.). — 4) « Notizie sulla frana tra il Venda e l'Orsara » (st.). — 5) « Les *Chaudrons* du Brenton » (st.). — 6) « Studio geo-fisico delle Isole Tremiti » (ms.).

12. Trabucco Giacomo. 1) « Le applicazioni della Geologia nell'Agricoltura moderna » (st.). — 2) « Fossili, stratigrafia ed età dei terreni della Repubblica di S. Marino » (st.). — 3) « Stratigrafia, età e chimica costituzione delle argille galestrine (*galestri*) nel bacino di Firenze » (st.). — 4) « Stratigrafia, età e chimica costituzione dell'arenaria *Maligno* e degli scisti argilloso-arenacei (bardellone) della prov. di Firenze » (st.). — 5) « I terreni della prov. di Firenze » (st.). — 6) « Fossili, stratigrafia ed età del calcare di Acqui (Alto Monferrato) » (ms.). — 7) « Carta geognostico-geologica di *Lamporecchio* ». — 8) « Carta geognostico-geologica di *Carmignano* ». — 9) « Carta geognostico-geologica di *Boscolungo* ». — 10) « Carta geognostico-geologica di *S. Marcello Pistoiese* ». — 11) « Carta geognostico-geologica di *Serravalle Pistoiese* ». — 12) « Carta geognostico-geologica di *Buggiano* ».

13. Ugolini Riccardo. 1) « Contribuzione allo studio delle roccie dell'alto Egitto » I-II. (st.). — 2) « Di una Eufotide a Saussaurite dei dintorni di Castiglianello nei monti livornesi » (st.). — 3) « Descrizione geologica dei monti d'oltre Serchio » (st.). — 4) « Ricerche sopra il coefficiente d'imbibizione di alcuni materiali edilizi dei dintorni di Pisa e di Livorno » (st.). — 5) « Il Rhinoceros Mercki Jaeg. dei terreni quaternari della Val di Chiana » (st.).

14. Ugolini Ugolino. 1) « Nota botanico-agraria sulle forme di stagione delle piante » (st.). — 2) « I fenomeni periodici delle piante bresciane » (st.). — 3) « Quinto elenco di piante nuove o rare pel bresciano » (st.). — 4) « Nota preliminare sui fenomeni della fioritura nelle piante bresciane » (st). — 5) « Curiosità della flora bresciana: La Margheritona grande (*Chrysantemum amplifolium* A. Fiori) » (st.) — 6) « Saggio di studî sulla vita iemale delle piante » (st.). — 7) « Contributo alla florula arboricola della Lombardia e del Veneto » (st.).

15. Zodda Giuseppe. 1) « Sull'ispessimento dello stipite di alcune palme » (st.). — 2) « Le briofite del messinese » (st.). — 3) « Sulla vegetazione del messinese; saggio di ecologia botanica » (st.). — 4) « Dell'applicazione di alcuni metodi grafici in geografia botanica » (st.).

Elenco dei lavori presentati
per esser presi in considerazione per la Fondazione *Santoro*.

1. Gosio Bartolomeo. « Studi sulle bioreazioni dell'arsenico, tellurio e selenio, e loro applicazioni pratiche » (st.).

2. Majorana Quirino. « Ricerche ed esperienze di Telefonia elettrica senza filo » (ms.).

3. Vanghetti Giuliano. « Plastica e protesi cinematiche. Nuova teoria sulle amputazioni e sulla protesi » (st.).

4. Anonimo (col motto: « Mai sono tanto vicino » ecc.). « Cosa è la Gravità » (ms.).

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio *Carpi*
per la *Zoologia*.
(Premio L. 900. — Scadenza 31 dicembre 1906).

Van Rynberk Gerardo. « La metameria somatica, nervosa, cutanea e muscolare dei vertebrati » (ms.).

CORRISPONDENZA

Il Segretario Millosevich dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

Le Società Reali di Londra e di Melbourne; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; l'Accademia delle scienze di Nuova York; le Società zoologiche di Amsterdam e di Tokyo; le Società geologiche di Londra, di Manchester e di Washington; il Museo di storia naturale di Nuova York; gli Osservatorii di San Fernando e di Cambridge Mass.

E. M.